

ISSN 2066 – 3250

ȘTIINȚE EXACTE ȘI ȘTIINȚE ALE NATURII



Vol. XVI



**EDITURA
UNIVERSITĂȚII
DIN ORADEA**

- 2024 -

Comitetul editorial

Editor șef

Filip Sanda Monica

Editor executiv

Fodor Alexandrina

Editori de specialitate

Cupșa Diana-biologie

Fodor Alexandrina-chimie

Toderaș Adina Monica-fizică

Mureșan Sorin-matematică

-informatică

Comitetul științific

Biologie

Cupșa Diana

Petruș-Vancea Adriana

Chimie

Badea Gabriela Elena

Fodor Alexandrina

Stănășel Oana Delia

Fizică

Macocian Eugen-Victor

Toderaș Adina Monica

Horea Cristian

Informatică

Popescu Constantin

Oros Horea Gavril

Matematică

Bălaj Mircea

Fechete Ioan

Oros Georgia Irina

Alb Lupaș Alina

Date contact

- Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe, C.P. 14, Oficiul Postal 1, Str. Universității, nr. 1, 410087, Oradea, Bihor, România
- Tel. +40-259-408161
- e-mail: afodor@uoradea.ro; sfilip@uoradea.ro

Informatii generale

- ISSN: 2066 – 3250
- Frecvența apariției: 1 număr/an
- Această revistă publică rezultatele cercetării științifice din domeniul Biologiei, Chimiei, Matematicii, Fizicii și Informaticii, ale studenților, cadrelor didactice din învățământul preuniversitar și ale elevilor.

EFECTUL ALELOPATIC AL SOLUȚIEI DE HREAN ASUPRA GERMINAȚIEI SEMINTELOR DE RIDICHE ROȘIE

Mirela Maria PRECUP¹, Ileana Simona LONGA²

¹ Colegiul Național "Doamna Stanca" – profesor de Biologie, Satu Mare, România

² Colegiul Național "Doamna Stanca" – elev clasa X-a C, Satu Mare, România

Adresa de corespondență: Mirela Precup, Colegiul Național "Doamna Stanca" Satu Mare, Str. Ștefan cel Mare, nr. 5, Satu Mare, România, tel. +40744856397, e-mail: mirelaprecup2013@yahoo.com

Rezumat: Acest studiu a avut drept scop evaluarea efectelor alelopatiche ale extractului apos de hrean asupra germinației semințelor și creșterii plantulelor de ridiche roșie. În acest sens, am evaluat efectele alelopatiche ale extractului apos de hrean asupra germinației semințelor de ridiche roșie, asupra creșterii organelor plantulelor de ridiche roșie și asupra acumulării de biomasă vegetală proaspătă la nivelul acestora. Experimentele de germinație au arătat faptul că, aplicarea unei soluții nediluate de extract apos de hrean a manifestat un efect aleloptic inhibitor, întârziind germinația cu o zi față de germinația semințelor variantei martor. Concentrația de 25% extract apos de hrean a avut un efect alelopativ pozitiv, stimulând cu aproximativ 30% creșterea în lungime a plantulelor de ridiche roșie și cu peste 50% acumularea de biomasă proaspătă a acestora. Concentrațiile de 50%, respectiv de 100%, au inhibat cu aproximativ 50% creșterea în lungime a plantulelor și cu peste 30% acumularea biomasei proaspete.

Cuvinte cheie: alelopatie, germinația semințelor, extract de hrean, ridiche roșie, biomasă proaspătă

INTRODUCERE

În mod firesc, anumite substanțe eliberate în mediu de către plante exercită asupra altora influențe variate, mai mult sau mai puțin severe. Acțiunea acestor produși secundari de metabolism poate favoriza sau defavoriza viața altor organisme învecinate în funcție de natura acestora [5]. Acest fenomen complex este numit *alelopatie*.

Conform Dicționarului Explicativ al Limbii Române, *alelopatia* înseamnă o „influență (inhibitoare) exercitată de unele plante superioare asupra plantelor din vecinătate prin intermediul unor substanțe chimice” [7].

Termenul de „allelopathie” derivă de la cuvintele grecești „allelon” = reciproc și „pathos” = suferință. Acesta caracterizează afecțiunea cauzată unei plante de către o altă plantă. În literatura de specialitate, termenul este folosit pentru determinarea relațiilor care se realizează între plantele ce constituie un ecosistem, ori între acestea și viețuitoarele aflate în gruparea corespunzătoare. Alelopatia este considerată ca fiind unul dintre domeniile moderne ale ecofiziologiei vegetale [6].

Substanțele cu efecte alelopatiche sunt elaborate în cadrul metabolismului secundar, având o greutate moleculară mai mică sau mai mare, fiind caracteristice organismelor vegetale. Acestea sunt prezente în diferite organe, precum: rădăcini, tulpini, frunze, flori, fructe și semințe. Astfel de compuși pot migra din țesuturile care le-au generat și se pot acumula în alte organe. Compușii chimici cu efecte alelopatiche nu au rol în procesele metabolice primare [6].

Hreanul (*Armoracia rusticana* Lam., familia *Brassicaceae*) este o plantă erbacee, perenă, originară din regiunile învecinate Mării Negre. Ea este cunoscută ca legumă și ca plantă medicinală. În țara noastră, această specie vegetală este cultivată în toate regiunile, în special, în jurul orașelor mari, dar crește și spontan, pe lângă garduri, în locuri umede [5].

Rădăcina metamorfozată de hrean conține proteine (2%), glucide (6%), săruri de sodiu (5%), de potasiu (295%), calciu (55%), fosfor (35%) și de fier (0,7%), precum și vitamine, glicozizi sulfurați, mirozină, cantități mici de ulei volatil, acid clorhidric, acid sulfuric, acid carbonic, acid silicic și antibiotice (fitoncide) [12]. Potențialul alelopativ al speciilor de *Brassicaceae* este atribuit eliberării în mediul înconjurător a izotiocianatului de alil, compus volatil, un derivat al sinigrinei [3].

Cercetările moderne vizează aplicarea compușilor alelopatici în combaterea buruienilor din agricultură. Utilizarea interacțiunilor alelopatiche pentru a favoriza culturile agricole și a reduce infestarea buruienilor a fost folosită de secole fără a înțelege baza chimică a fenomenului. Pe măsură ce opțiunile de erbicide scad în era buruienilor rezistente la erbicide, există un interes reînnoit pentru utilizarea alelopatiei pentru gestionarea buruienilor [1]. Încorporarea unei abordări ecologice naturale ca instrument de control al buruienilor prin cultivarea unor culturi specifice sau pulverizarea câmpurilor cu extracte care conțin compuși alelopatici poate reduce semnificativ utilizarea erbicidelor [9].

Pentru a asigura o dezvoltare agricolă durabilă, este importantă exploatarea sistemelor de cultură care profită de influența stimulative/inhibitoare a plantelor alelopatiche pentru a regla creșterea și dezvoltarea plantelor și pentru a evita autotoxicitatea alelopatică. Alelochimicele pot fi utilizate ca regulatori de creștere, erbicide, insecticide și produse antimicrobiene pentru protecția culturilor [2].

Deoarece în literatura de specialitate există relativ puține informații privind fitotoxicitatea hreanului, ne-am propus să evaluăm efectul alelopativ al extractului apos de hrean asupra germinației semințelor și creșterii plantulelor de ridiche roșie, pornind de la ipoteza că extractul de hrean este un posibil erbicid natural ce poate fi folosit în agricultura ecologică și sustenabilă [8].

Am optat să studiem efectul alelopativ al extractului apos de hrean asupra semințelor de ridiche roșie, întrucât, în literatura de specialitate, am găsit date care prezintă un posibil efect alelopativ al acestuia pe semințe de mazăre, trifoi roșu, ridiche de lună, muștar alb, salată verde, castraveți, grâu, zănie și obsigă nearistată, în general, acțiunea alelopativă inhibitoare manifestându-se selectiv, efectele fiind mai intense la monocotiledonate [6].

Totodată, există și studii care relevă faptul că, la rândul său, ridichea (*Raphanus sativus* L.) are un efect alelopativ semnificativ asupra diferitelor specii de plante datorită compușilor săi alelochimici [13].

MATERIALE ȘI METODE

Materialul biologic

Materialul biologic utilizat a constat în semințe de ridiche roșie, de proveniență certificată, respectiv, plantulele rezultate din embrionii acestora, împărțite în cinci variante experimentale. Am ales ca și material de studiu semințele de ridiche roșie, deoarece acestea prezintă o rată mare de germinație, încolțesc în câteva zile, fiind puțin pretențioase la factorii de mediu.

Metoda de obținere a extractului apos de hrean

Extractul apos a fost preparat din 100 g de rădăcină de hrean (recoltată toamna târziu), răzuită fin, ținută la macerat într-un litru de apă distilată timp de 72 de ore la temperatura camerei (aprox. 22-24°C), ulterior filtrată, iar soluția obținută la final fiind considerată soluția-mamă (de concentrație 100%). Din această soluție, folosind apă distilată, am realizat diluțiile corespunzătoare fiecărei variante experimentale: V1 - concentrație de 25%; V2 - concentrație de 50%; V3 - concentrație de 75%; V4 - concentrație de 100% și V5 - lotul martor, doar apă distilată (Tabelul 1).

Ca și metodă de germinație, am folosit metoda Top Paper (TP) (Fig. 1). Semințele de ridiche roșie au fost puse la germinat pe un substrat de șervețele albe, umectat, în prealabil, cu câte 20 ml de soluție caracteristică fiecărei variante de lucru. Semințele au fost poziționate uniform cu ajutorul unei pensete la o distanță egală (1-1,5 cm), în 5 șiruri paralele. Ulterior, substratul de germinație a fost umectat zilnic cu câte 3 ml de soluție specifică variantei respective.

Tabelul 1. Variantele experimentale.

Varianta experimentală	Concentrație extract hrean
V1	25%
V2	50%
V3	75%
V4	100%
V5 (martor)	apă distilată

Metoda de germinație a semințelor și de creștere a plantulelor

Ca și recipiente de germinație, am folosit caserole alimentare din plastic cu capac, dimensiunile acestora fiind de 22,5×8×15 cm, incolore și transparente, acest fapt fiind important pentru accesul semințelor și plantulelor la lumina naturală. Temperatura camerei a fost constantă, de 22°C, iar aerisirea caserolelor s-a efectuat zilnic timp de aproximativ 30 de minute.

**Figura 1.** Aspectul semințelor de ridiche roșie puse la germinat folosind metoda TP.

Parametrii monitorizați

Pe parcursul experimentului, am monitorizat: procentul de germinație a semințelor de ridiche roșie – în a 3-a zi de la punerea materialului semincer la germinat, măsurători biometrice (de creștere în lungime) ale organelor plantulelor de ridiche roșie – în ziua a 9-a de germinație, respectiv, măsurători gravimetrice (privind masa proaspătă) ale plantulelor de ridiche roșie – în a 11-a zi de germinație.

Procentul de germinație se referă la numărul semințelor germinate din totalul de 100 de semințe puse la încolțit.

Măsurătorile privind creșterea în lungime a plantulelor de ridiche roșie, la fiecare variantă experimentală, au fost realizate pe un număr de 10 de plantule, alese randomizat în ziua a 9-a din momentul punerii semințelor la germinat. Evaluarea creșterii în lungime a plantulelor s-a realizat prin măsurarea individuală a fiecărui organ embrionar, și anume, rădăcina, hipocotil și cotiledoane, pentru fiecare plantulă, iar prin însumarea primelor două, s-a calculat lungimea întregii plantule. Ulterior, am calculat valorile medii ale acestor parametrii, la fiecare variantă experimentală, martorul (V5) fiind lotul tratat cu apă distilată.

Măsurătorile privind acumularea de biomasă proaspătă au fost efectuate pe un număr de 10 plantule/variantă de lucru, alese randomizat, în cea de-a 11-a zi de germinație. În acest sens, plantulele au fost recoltate de pe substrat cu ajutorul unei pensete, tamponate cu o bucată de hârtie de filtru pentru absorbția apei excesive, și apoi cântărite cu ajutorul unei balanțe analitice. Experimentul a fost derulat în perioada februarie-martie 2024.

REZULTATE ȘI DISCUȚII

Pentru monitorizarea germinației (Fig. 2), în a 3-a și a 4-a zi de la punerea semințelor de ridiche roșie la germinat, am numărat semințele germinate în fiecare lot experimental și am calculat procentul acestora, din totalul de 100. Astfel, în acest moment al experimentului, procentul de germinație la majoritatea variantelor experimentale a fost de 100%, cu excepția

variantei V4, la care, extractul apos de hrean în concentrație de 100%, a inhibat cu 12% procentul de germinație a semințelor. Însă, în cea de a 4-a zi de germinație, și la această variantă de lucru a fost marcat un procent de germinație de 100%, ceea ce ne determină să afirmăm faptul că, extractul apos de hrean nediluat a manifestat un ușor efect alelopativ inhibitor care a determinat întârzierea germinației semințelor de ridiche roșie cu o zi, comparativ cu lotul martor.

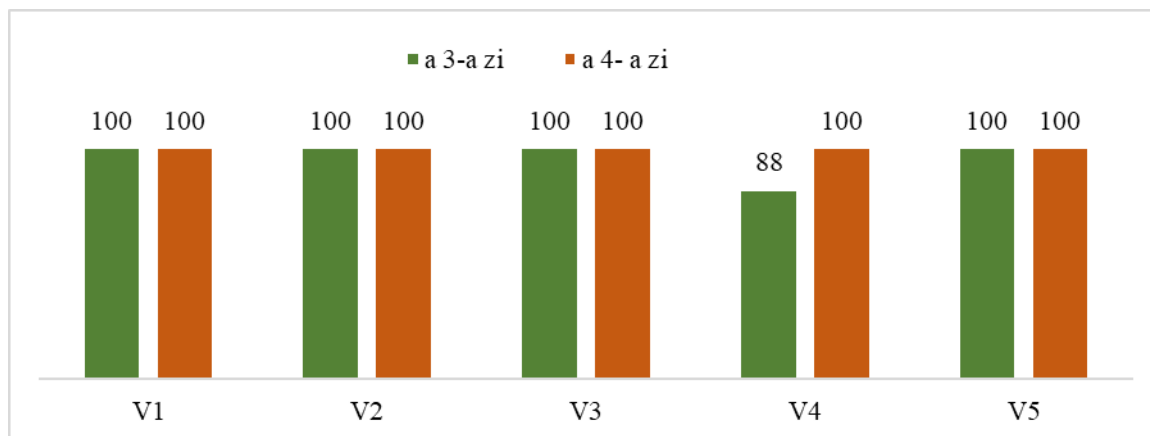


Figura 2. Monitorizarea ratei germinației la 3 și 4 zile de la punerea la germinat, în funcție de variantele experimentale testate: V1 – 25% extract; V2 – 50% extract; V3 – 75% extract; V4 – 100% extract și V5 – apă distilată (martor).

Conform unor studii recente privind germinația semințelor de ridiche (*Raphanus sativus* L. var. *oleiformis* Pers.), extractele majorității speciilor de buruieni testate au manifestat o inhibare puternică a germinației semințelor [15].

Referitor la măsurătorile biometrice efectuate, în ziua a 9-a de germinație, comparativ cu măsurătorile plantulelor variantei martor, în cazul variantei V1, soluția cu concentrația de 25% extract de hrean a stimulat creșterea în lungime a plantulelor de ridiche roșie cu aprox. 30% (Tabelul 2).

Tabelul 2. Valorile medii ale măsurătorilor biometrice ale organelor plantulelor de ridiche roșie, determinate în a 9-a zi de la punerea semințelor la germinat, în funcție de variantele experimentale testate: V1 – 25% extract; V2 – 50% extract; V3 – 75% extract; V4 – 100% extract și V5 – apă distilată (martor).

Varianta experimentală	Rădăciniță (cm)	Hipocotil (cm)	Cotiledoane (cm)	Talie plantulă (cm)
V1	4,17	2,87	1,22	8,26
V2	2,91	1,77	0,80	5,48
V3	1,19	2,10	0,74	4,03
V4	2,00	1,68	0,58	4,26
V5	3,07	2,29	0,99	6,35

Exprimată procentual, creșterea în lungime a plantulelor de ridiche roșie, la loturile tratate cu extract de hrean, comparativ cu varianta martor, a fost înregistrat un efect alelopativ inhibitor, scăderile marcate fiind: la varianta V2 – de 13,74%, la V3 – de 36,54%, iar la V4 – de 32,92%.

Referitor la efectele extractului de hrean înregistrate la nivelul fiecărui organ vegetal, pot fi desprinse următoarele aspecte: la nivelul rădăcinițelor – la V3, efectul alelopativ a fost maxim, creșterea fiind inhibată cu 61,24% față de martor; la nivelul hipocotilelor – la V4 a fost înregistrată o diminuare a creșterii în lungime cu 26,64% față de martor; la nivelul cotiledoanelor – la V4 a fost sesizată o scădere cu 41,42% a creșterii în lungime (Fig. 3).

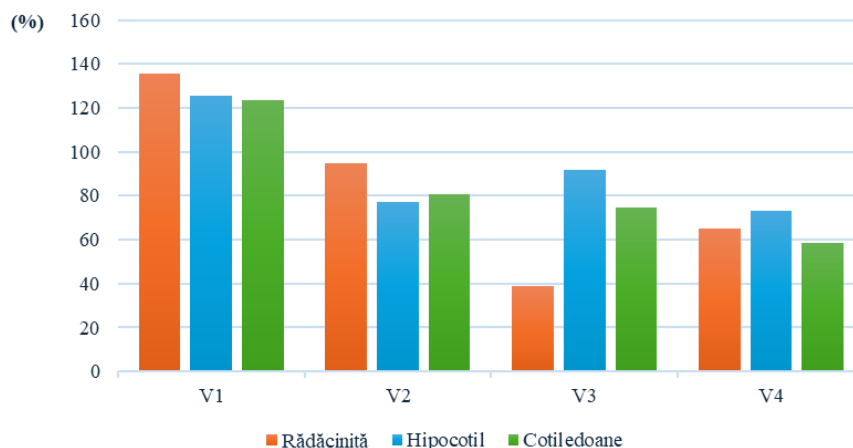


Figura 3. Rezultatele procentuale ale măsurătorilor biometrice ale organelor plantulelor, în ziua a 9-a de germinație, raportate la rezultatele variantei martor, considerate 100%.

Efecte alelopatiche inhibitorii privind creșterea în lungime au fost semnalate și de alți autori în cazul plantulelor de porumb și floarea-soarelui. Astfel, lungimea plantulelor, lungimea rădăcinii și masa proaspătă a plantulelor, la aceste specii, au înregistrat modificări odată cu creșterea concentrației de extracte apoase de *Ficus benghalensis* la care au fost expuse [10].

În ceea ce privește măsurătorile de masă proaspătă, am sesizat faptul că, biomasa proaspătă a plantulelor de ridiche roșie, acumulată în cazul fiecărei variante experimentale, diferă în funcție de concentrația extractului de hrean la care au fost expuse pe parcursul germinației și creșterii (Tabelul 3).

Tabelul 3. Rezultatele măsurătorilor gravimetrice, din ziua a 11-a de germinație.

Varianta experimentală	Masa proaspătă (g)
V 1	1,18
V2	0,50
V3	0,76
V4	0,56
V5	0,77

Astfel, dacă raportăm procentual acumularea de biomasă proaspătă a plantulelor de ridiche roșie a diferitelor variante de lucru la valorile obținute în cazul variantei martor (considerată 100%), extractul de hrean în concentrație de 25% manifestă un efect stimulator asupra acumulării de biomasă proaspătă, masa proaspătă a plantulelor din V1 fiind mai mare cu 53,24%. În cazul variantei V3, nu au fost raportate variații foarte mari de masă proaspătă, comparativ cu valorile determinate la lotul martor (V5), considerate 100% (Fig. 4).

Concentrațiile de 50% și de 70% ale extractului de hrean au manifestat efecte inhibitorii asupra acestui parametru, în ziua a 11-a de germinație, scăderea în biomasă proaspătă sesizată fiind: la V2 - de minus 35,07%, iar la V4 - de minus 27,28%.

Mai mult decât atât, am sesizat modificări de aspect în funcție de concentrația extractului de hrean aplicată corespunzător fiecărei variante, rădăcinițele plantulelor de ridiche roșie, dar și hipocotilele acestora fiind puternic contorsionate (Fig. 5).

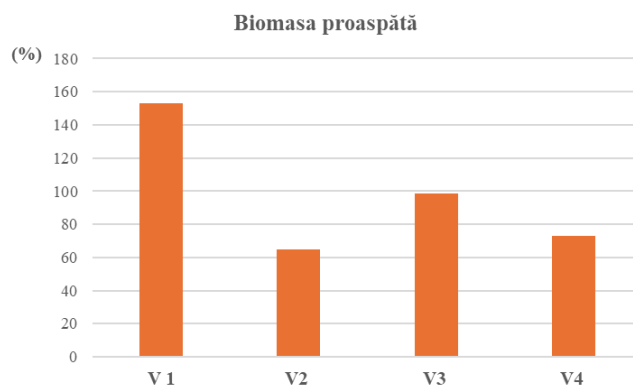


Figura 4. Rezultatele procentuale ale măsurătorilor privind masa proaspătă a plantulelor de ridiche roșie, în ziua a 11-a de germinație, raportate la rezultatele variantei martor, considerate 100%.

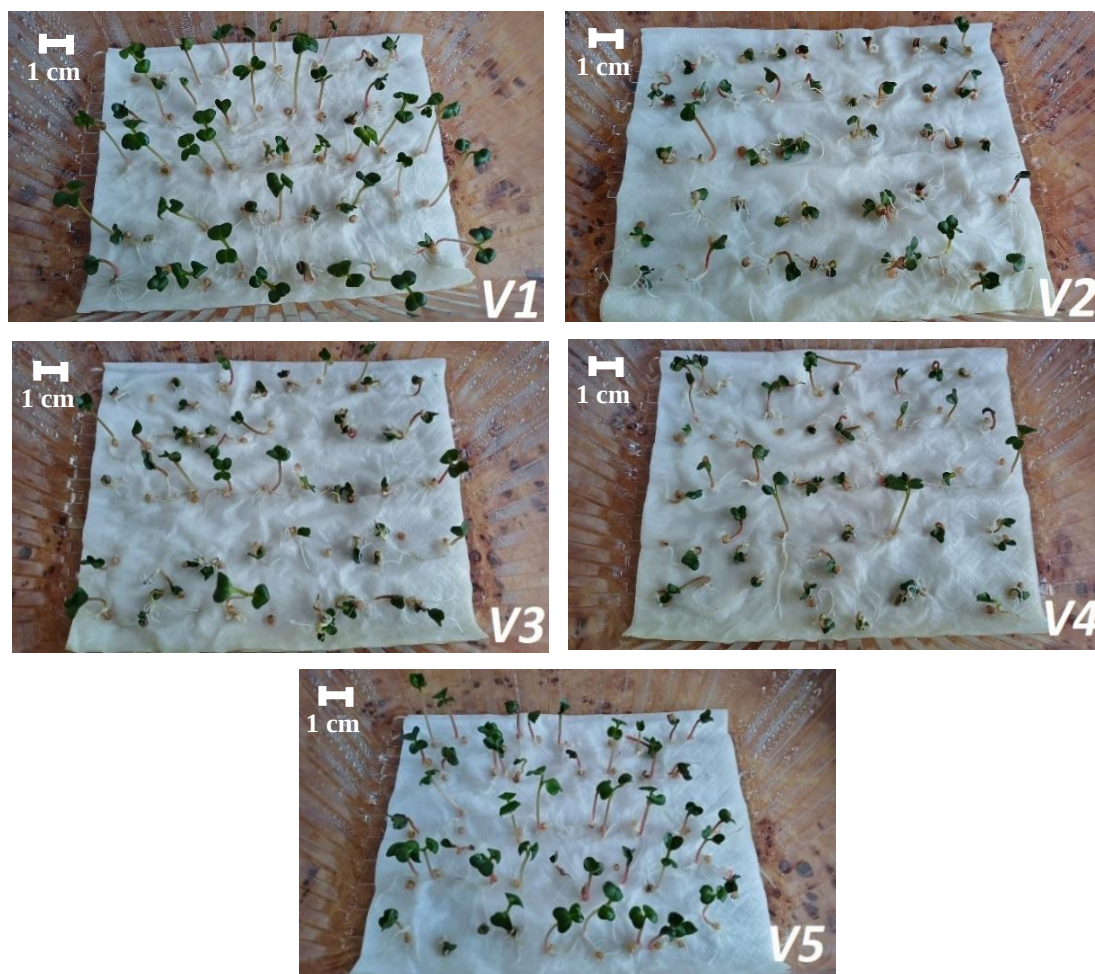


Figura 5. Aspecte ale plantulelor de ridiche roșie, în cea de-a 9-a zi de germinație.

Inhibarea germinației, a creșterii timpurii și a biomasei proaspete la ridiche a fost semnalată și de alți autori, care au arătat faptul că, în funcție de soi, extractele apoase din frunzele de *Solidago canadensis* L. scad germinația și creșterea la plantulele de *Raphanus sativus* L. [11].

Aceste rezultate, privind efectul alelopatic preponderent inhibitor al extractului apos de hrean asupra germinației și creșterii plantulelor de ridiche roșie, sunt similare cu cele obținute de alți autori, pe semințe de ridiche de lună [6], sau pe semințe de mazăre și de castraveți [5], respectiv, cu cele privind efectul alelopatic al extractelor apoase din tulpinile și frunzele unor Apiaceae asupra germinației semințelor și a creșterii organelor plantulelor de muștar alb [14].

CONCLUZII

1. Asupra germinației semințelor, efectul alelopativ inhibitor a fost prezent numai în ziua a 3-a de germinație, în cazul aplicării unei soluții nediluate de extract apos de hrean.
2. Asupra creșterii în lungime a plantulelor, rezultatele au relevat faptul că o concentrație de 25% de extract de hrean, în ziua a 9-a de germinație, a avut un efect alelopativ pozitiv, stimulând creșterea întregii plantule, față de varianta martor. Concentrațiile de 50%, respectiv de 100% au inhibat puternic creșterea în lungime a plantulelor, față de varianta martor.
3. Asupra acumulării de biomasă proaspătă a plantulelor de ridiche roșie, în cea de-a 11-a zi de germinație, tratamentul cu concentrația de 25% de extract de hrean a avut, de asemenea, un efect stimulator, masa proaspătă a plantulelor fiind mai ridicată, comparativ cu cea identificată la lotul martor. La celelalte variante experimentale s-a manifestat un efect alelopativ inhibitor, în general, direct proporțional cu concentrația extractului de hrean folosită.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Chaïb S., Pistevos J.C.A., Bertrand C., Bonnard, I. (2021), *Allelopathy and allelochemicals from microalgae: An innovative source for bio-herbicidal compounds and biocontrol research*, Algal Research, Vol. 54, pp.102213.
- [2] Cheng F., Cheng Z. (2015), *Research progress on the use of plant allelopathy in agriculture and the physiological and ecological mechanisms of allelopathy*. Front. Plant Sci., Vol. 6, pp.1020.
- [3] Choesin D.N., Boerner R.E.J. (1991), *Allyl isothiocyanate release and the allelopathic potential of Brassica napus (Brassicaceae)*. Am. J. of Bot., Vol.78, No.8, pp. 1083-1090.
- [4] Ciofu R., Stan N., Popescu V., Chilom P., Apahidean S., Horgoș A., Berar V., Lauer F.K., Atanasiu N., (2003), *Plante legumicole perene. Tratat de legumicultură*, Ed. Ceres, București, pp. 984-989.
- [5] Corbu S., Cachiță-Cosma D., Sipos M. (2007), *Efectul alelopativ al extractului apos de hrean (Armoracia Rusticana L.) asupra germinației și creșterii plantulelor de mazăre (Pisum Sativus L.) și de castraveți (Cucumis Sativus L.)*, Studia Universitatis "Vasile Goldis" Arad, Seria Științele Vieții (Life Sciences Series), Arad, Vol. 17, No. 1, pp. 51-54.
- [6] Corbu S., Cachiță-Cosma D. (2010), *Alelopatia*, Ed. Universității din Oradea, Oradea, pp. 10-13, 28-36, 78-79, 110, 148-149.
- [7] <https://dexonline.ro/definitie/alelopatie>, accesat la 10 ian. 2024.
- [8] Khamare Y., Chen J., Marble S.C. (2022), *Allelopathy and its application as a weed management tool: A review*. Frontiers in Plant Science, pp. 13.
- [9] Kostina-Bednarz, M., Płonka, J. & Barchanska, H. (2023), *Allelopathy as a source of bioherbicides: challenges and prospects for sustainable agriculture*. Rev Environ Sci Biotechnol, Vol. 22, pp. 471–504.
- [10] Mohsin N., Tariq M., Zaki M.J., Abbasi M.W., Imran M., (2016), *Allelopathic effect of Ficus benghalensis L. leaves extract on germination and early seedling growth of maize, mungbean and sunflower*. Int. J. Biol. Res., Vol. 4, No. 1, pp. 34-38.
- [11] Mozdzen K., Barabasz-Krasny B., Zandi P., Kliszcz A., Puła J. (2020), *Effect of aqueous extracts from Solidago canadensis L. leaves on germination and early growth stages of three cultivars of Raphanus sativus L. Var. radicu Pers. Plants*, Vol. 9, pp.1549.
- [12] Pârvu C. (1991), *Universul plantelor*. Ed. Enciclopedică, pp. 209-210, 321, 356-357.
- [13] Rasul S.A., Ali K.A., (2020), *Study the allelopathic effect of radish by incorporate into soil on some poaceae species*. Plant Archives, Vol. 20, Supplement 2, pp. 3624-3627.
- [14] Roșu F., Șipoș M. (2016), *Efectul extractelor apoase din tulpinile și frunzele unor Apiaceae asupra germinației semințelor și a creșterii organelor plantulelor de muștar alb (Sinapis alba L.)*, Științe Exacte și Științe ale Naturii, Oradea, Vol. VIII, pp. 18-21.
- [15] Tsytsiura Y., Sampietro D. (2024), *Allelopathic effects of annual weeds on germination and seedling growth of oilseed radish (Raphanus sativus L. var. oleiformis Pers.)*. Acta fytotechn zootechn, Vol. 27, pp. 77–97.

DETERMINAREA CONCENTRAȚIEI UNEI SOLUȚII NECUNOSCUTE DE SULFAT DE CUPRU

Alexandru Nicolae BADEA¹, Mark TOZSER¹, Cristina SZABO¹
Anda Ioana Grațîela PETREHELE², Claudia Mona MORGOVAN²

¹studenți licență Chimie anul III, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea

²profesori coordonatori Departamentul de Chimie, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea

Rezumat: În această lucrare s-a determinat concentrația ionilor de cupru dintr-o probă de sulfat de cupru necunoscută din laborator. Scopul a fost să se afle concentrația acestei soluții pentru a putea fi utilizată ulterior în alte experimente. Pentru determinarea concentrației s-a ales metoda de complexare cu EDTA, iar studiul s-a realizat în mediu acid, la pH 3, în soluție tampon de acid acetic cu acetat de sodiu. Metoda utilizată în acest experiment a fost o titrare colorimetrică efectuată la 750 nm

Cuvinte cheie: cupru, colorimetrie, titrare

INTRODUCERE

O metodă foarte versatilă a analizei instrumentale este titrarea colorimetrică, care este foarte utilă în cazul în care fie unul din reactanți sau produsul de reacție este colorat. Dispariția culorii sau formarea unui compus de culoare diferită față de cea a reactanților permite urmărirea reacției chimice și analiza cantitativă a unuia dintre componenți prin metoda titrării fotocolorimetrice. Avantajul acestei metode este că se pot folosi cantități mici de reactant, iar analiza decurge cu o precizie foarte mare. Față de metodele volumetrice, tehnicile colorimetrice efectuate la spectrofotometru permit determinarea de concentrații mai mici de substanțe, de ordinul 10^{-3} mg/mL [1-3].

În metoda titrării colorimetrice se determină variația absorbantei soluției inițiale titrate la adăugarea de reactant de titrare. Rezultatul va fi un grafic realizat din două drepte. Prima dreaptă corespunde reacției chimice evidențiată prin consumarea reactantului colorat sau prin formarea unui compus de altă culoare [2-5]. Cea de-a doua pantă este asociată adăugării reactantului de titrare în exces și poate avea o pantă ușor negativă, dacă s-a urmărit colorimetric consumarea reactantului, sau o pantă slab pozitivă, în cazul în care s-a urmărit formarea produsului de reacție. Punctul de intersecție a celor două drepte corespunde atingerii echivalenței reacției chimice, în care s-a consumat întreaga cantitate de reactant titrat și permite determinarea volumului de reactant de titrare necesar desfășurării complete a reacției chimice. Pe baza acestei valori se poate obține prin calcule concentrația reactantului analizat, care a făcut obiectul titrării în acest caz [4-6].

Analiza fotocolorimetrică se bazează pe principiul lui Lambert-Beer, conform căruia lumina care trece printr-o cuvă de sticlă în vizibil la o anumită lungime de undă este parțial absorbită de o soluție colorată. Lumina absorbită are culoarea complementară lungimii de undă la care se face absorbția. Conform legii lui Lambert-Beer cantitatea de lumină absorbită este direct proporțională cu concentrația soluției, altfel spus, absorbanta unei soluții colorate va fi cu atât mai mare cu cât concentrația compusului colorat din soluție este mai mare. Legea lui Lambert-Beer este [7, 8]:

Unde

$$A = \varepsilon \cdot l \cdot c \quad (2)$$

unde

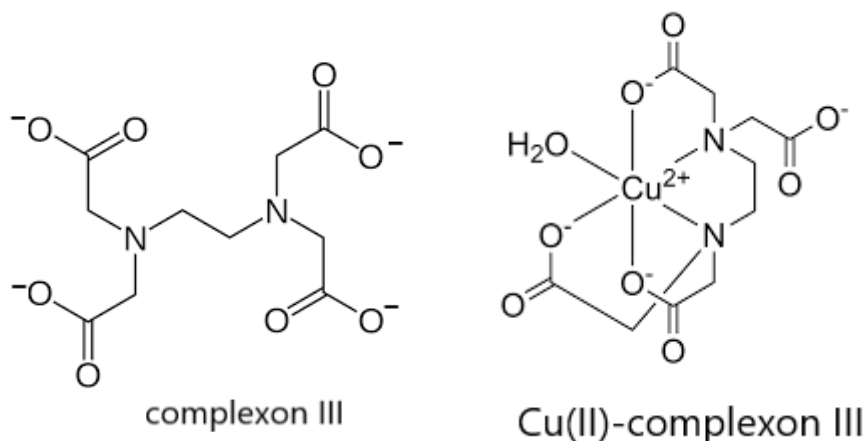
ε este absorbivitatea molară a compusului analizat și este o valoare care depinde de natura compusului care absoarbe la o anumită lungime de undă;

l este grosimea cuvei, egală cu 1 cm;

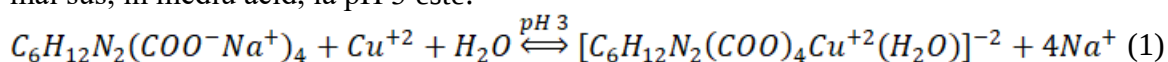
C este concentrația componentului analizat

În această lucrare ne-am propus să determinăm concentrația molară a unei soluții de sulfat de cupru preparată în laborator în urmă cu ceva timp. Am dorit să aflăm această informație pentru a putea utiliza în continuare soluția în experimente efectuate ulterior în laborator cu studenții, fără a fi puși în situația de a trece acest reactiv la deșeuri, deoarece procesul de distrugere a deșeurilor este destul de toxic pentru mediu și costisitor.

Metoda aleasă a fost una de determinare a concentrației ionilor de cupru din proba de sulfat de cupru de concentrație necunoscută prin titrare cu complexon III în mediu acid. Complexonul III numit etilendiaminotetracetat de sodiu este sarea unui tetraacid, cu capacitate complexantă foarte puternică pentru un număr foarte mare de cationi, de la ionii de calciu și magneziu, responsabili pentru duritate, până la un număr foarte mari de cationi ai metalelor tranzitionale, ca fier, cobalt sau cupru. Formula sa structurală este prezentată mai jos, ca și cea a complexului format cu ionii de cupru (+2) [9-11].



Reacția chimică dintre complexon III și soluția de sulfat de cupru cu formarea complexului de mai sus, în mediu acid, la pH 3 este:



Se poate observa că reacția este una în care o moleculă de complexon III reacționează cu un mol de soluție de sulfat de cupru și că prin complexare un ion de Cu (II) va lua locul celor 4 ioni de sodiu în condiții de pH acid [12, 13].

Titarea spectrofotometrică reprezintă o grupă de metode titrimetrice de analiză în care punctul final al titrării se determină după măsurarea absorbânței soluției. În această metodă se folosesc toate reacțiile ce corespund analizei titrimetrice: reacții acido-bazice, de sedimentare, de oxido-reducere și, îndeosebi, de complexare.

PARTE EXPERIMENTALĂ

Cu o pipetă se scot 5 ml din soluția de sulfat de cupru necunoscută, căreia dorim să îi determinăm concentrația, și se trec cantitativ într-un balon cotat de 50 mL. Peste se adaugă 5 ml soluție tampon pH 3, obținut prin amestecarea a două soluții de acid acetic și acetat de sodiu de concentrație 1 M, și se aduce amestecul obținut la volum prin adăugare de apă distilată. Se închide balonul cotat cu un dop și se lasă să se omogenizeze timp de o jumătate de oră.

Circa 4,0 ml din soluția de analizat obținută se trec cu pipeta în cuva spectrofotometrului și va servi ca probă martor. Se determină absorbânța probei martor față de apă distilată la 750 nm. Valoarea obținută pentru proba martor se va scădea din toate valorile absorbânțelor următoare citite față de apă distilată.

Din balonul cotat cu amestecul de probă de sulfat de cupru și soluție tampon pH 3, se scot 20 mL de soluție cu o pipetă și se trec într-un pahar Berzelius în care se găsește un peștișor magnetic. Paharul se așază pe plita agitatorului magnetic.

Sub agitare se titrează cu soluția de complexon III 0,05 M. Se adaugă cu o micropipetă 0,2 mL de soluție de complexon III 0,05 M în paharul cu proba. După omogenizare prin agitare, cam la un minut se scot 4 mL de amestec de reacție cu o pipetă și se trec într-o cuvă de sticlă. Se determină absorbânța probei la 750 nm, față de blankul de apă distilată. Rezultatul se corectează ținând cont de absorbânța probei martor, astfel:

$$A_{\text{probă}} = A_{\text{probă citită}} - A_{\text{martor}} \quad (3)$$

Proba din cuva de sticlă se recuperează după citire în paharul Berzelius cu amestecul de reacție. În acesta, sub agitare se mai adaugă 0,2 mL de complexon III 0,05 M cu micropipeta. Se agită un minut și se trec din nou 4 mL în cuvă și se face o a doua citire față de apa distilată la 750 nm. Rezultatul obținut se corectează conform ecuației (3). După citire soluția din cuva de sticlă se recuperează în paharul Berzelius.

Experimentul se repetă până se observă după un număr succesiv de minim cinci măsurători o schimbare semnificativă în modul în care variază absorbanta de la o determinare la alta. Se urmărește să se treacă semnificativ de punctul de echivalență al reacției chimice astfel încât acesta să se poată determina prin metoda grafică. Practic titrarea se consideră încheiată în momentul în care variația de absorbanta a devenit nesemnificativă, aproape constantă.

Rezultatele obținute pentru determinările efectuate sunt înregistrate în Tabelul 1.

REZULTATE ȘI DISCUȚII

Rezultatele obținute la titrarea colorimetrică înregistrate în tabelul 1 ne arată cum a variat absorbanta probelor titrate după ce s-a scăzut absorbanta probei martor, corespunzătoare soluției inițiale de sulfat de cupru.

Din rezultatele obținute se poate vedea că la formarea complexului dintre ionii de Cu(II) și complexon III, absorbantele înregistrate la 750 nm au crescut ușor datorită culorii albastre mult mai intense a complexului rezultat. Valoarea absorbantei practic crește până la consumarea completă a ionilor de Cu(II) și legarea lor în complexul de tip diaminotetracetat prezentat în figura de mai sus, din partea introductivă a lucrării.

Pe baza rezultatelor obținute în tabelul 1 s-a trasat graficul de variație a absorbantei amestecurilor de reacție cu volumul de complexon III 0,05 M adăugat. Punctele obținute au condus la un grafic, Figura 1, realizat din două drepte cu un punct de intersecție corespunzător unui volum de 1 mL de complexon III 0,05 M. Acesta a reprezentat volumul de complexon necesar titrării a 20 mL din amestecul de soluție de sulfat de cupru și tampon acetat pH 3 preparat în balonul cota de 50 mL.

Tabel 1. Valorile absorbantelor obținute la titrarea probei de Cu(II) cu soluția de complexon III 0,05 M la 750 nm

Nr. determinare	V complexon III 0,05 M (mL)	Absorbanță (750 nm)
1	0	0
2	0,2	0,034
3	0,4	0,056
4	0,6	0,085
5	0,8	0,114
6	1	0,138
7	1,2	0,136
8	1,4	0,135
9	1,6	0,134
10	1,8	0,133
11	2	0,132

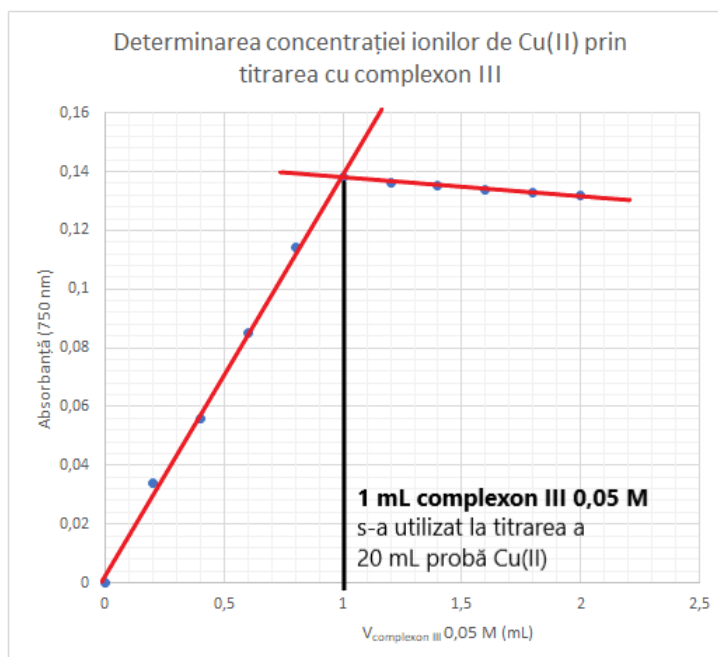


Figura. 1. Determinarea fotocolorimetrică a volumului de complexon III 0,05 M utilizat pentru titrarea probei de sulfat de cupru

Mai jos este prezentat algoritmul de calcul pentru determinarea concentrației molare a probei neetichetate de sulfat de cupru recuperată din laborator. Calculele pleacă de la rezultatul grafic obținut care arătat că 20 mL din proba analizată în paharul Berzeliiu cu conținut de ioni de Cu(II) s-a folosit 1 mL de soluție de complexon III 0,05 M în condiții de pH 3.

1) se determină numărul de moli din 1 ml complexon III 0,05 M:

0,05 moli complexon III1000 mL (1L soluție)

x.....1 mL

$x=0,05/1000=5 \cdot 10^{-5}$ moli complexon III

2) se determină numărul de moli de Cu(II) din 20 mL soluție pe baza reacției de mai sus:

1 mol complexon III.....1 mol Cu (II)

$5 \cdot 10^{-5}$ moli complexon III $y=5 \cdot 10^{-5}$ moli Cu(II)

3) se determină numărul de moli de Cu (II) din 50 mL soluție preparată de student

20 mL soluție $5 \cdot 10^{-5}$ moli Cu(II)

50 mL soluțiex

$x = \frac{50 \cdot 5 \cdot 10^{-5}}{20} = 1,25 \cdot 10^{-4}$ moli de Cu(II)

4) se determină masa de Cu (II) din probă știind că $A_{Cu} = 63,546$ g/mol

$m_{Cu} = 1,25 \cdot 10^{-4} \cdot 63,546 = 7,94325$ mg Cu (II)

5) se determină concentrația soluției preparate exprimată în mg Cu(II)/mL știind că pentru prepararea soluție de 50 mL s-au folosit 4 mL din soluția inițială

7,94325 mg Cu(II)5 mL soluție

c.....1 mL soluție

$c = 7,94325/5 = 1,58865$ mg Cu(II)/mL

6) se determină masa de Cu(II) dintr-un litru de soluție exprimată în grame

1 mL soluție..... 1,58865 mg Cu(II)

1000 mL soluțiex

$$x = 1000 \cdot 1,58865 \text{ mg} = 1,58865 \text{ g Cu (II)}$$

7) se determină concentrația molară a soluției de sulfat de cupru analizată, adică numărul de moli de sulfat de cupru dintr-un litru de soluție:

$$C_M = \frac{m_{\text{Cu(II)}}}{A_{\text{Cu(II)}}} = \frac{1,58865}{63,546} = 0,025 \text{ M}$$

CONCLUZIE

Rezultatul final al determinării concentrației soluției de sulfat de cupru neetichetată, găsită în laborator a fost de 0,025 M. Avantajul metodei este că a permis recuperarea unei soluții și ne-a permis posibilitatea de a utiliza această soluție în experimente viitoare. Rezultatul obținut a indicat că această metodă este foarte eficientă și precisă în determinările cantitative.

BIBLIOGRAFIE

- [1]Flaschka H. A. (2013). *EDTA titrations: an introduction to theory and practice*. Elsevier
- [2]Ueda S. etc. (1994), *Titration analysis of calcium salts of organic acids using potentiometry and photometry*. Analytical sciences, Vol.10, No.3, pp. 513-517
- [3]Sierra F., etc. (1975), *Photochemical reduction of phenosafranine by edta and its use in amperometric titrations*. Analytica Chimica Acta, Vol. 78, No.2, pp. 277-283
- [4]Burgot J.L., Burgot, J.L. (2012), *Complexometry III: Metal Cation Indicators and Types of EDTA Titrations*. Ionic Equilibria in Analytical Chemistry, pp. 525-541
- [5]Dot K. (1978), *Thermometric studies on the Fe (III)—EDTA chelate*. Talanta, Vol. 25, No.2, pp. 97-101
- [6]Mondal, K. Pradip, Shah J. B. (2024), *"A novel pH-sensitive method for the quantification of Ca 2+ ions by complexometric titration with Na 3 HEDTA*. Analytical Methods, Vol.16, No.33, pp. 5628-5632
- [7]Nurjayadi M., Romundza F., Moersilah M. (2021). *Application of the Lambert-Beer legal concept in learning spectroscopy UV-Vis with simple spectrophotometers*. AIP Conference Proceedings. Vol. 2331. No. 1. AIP Publishing
- [8]Hardesty J. H., Bassam A. (2010), *Spectrophotometry and the Beer-Lambert Law: An important analytical technique in chemistry*. Collin College, Department of Chemistry, pp. 1-6.
- [9]Szakács Z., Szabolcs B., Noszál B. (2008): *Resolution of carboxylate protonation microequilibria of NTA, EDTA and related complexones*. Talanta, Vol. 74, No.4, pp. 666-674
- [10]Christensen T., etc. (2003), *Additivity and the physical basis of multivalency effects: a thermodynamic investigation of the calcium EDTA interaction*. Journal of the American Chemical Society, Vol. 125, No.24, pp. 7357-7366
- [11]Novick S. G. (1997), *Complexometric titration of zinc: An analytical chemistry laboratory experiment*. Journal of chemical education, Vol. 74, No.12, pp. 1463
- [12] Prasad K., Kommuri MM, Syed R. (1993), *Evaluation of the quality of colour changes of complexometric indicators in the titration of copper (II) with EDTA by tristimulus colorimetry*. Microchimica Acta, Vol. 112, pp. 63-69
- [13]Fabre P. L., Reynes O. (2010), *Determination of copper and zinc in brass: two basic methods*. Journal of chemical education, Vol. 87, No.8, pp. 836-837

SEPARAREA UNOR CAROTENOIDE DIN FRUNZELE DE MUR (*Rubus fruticosus*)

Erika PAPP¹, Rares Mihnea HODISAN², Sorin HODISAN³

¹absolvent Chimie, Universitatea Oradea, Facultatea de Informatica si Stiinte

²student anul IV, Facultatea de Medicina si Farmacie Iuliu Hatieganu, Cluj-Napoca

³profesor coordinator, Universitatea Oradea, Facultatea de Informatica si Stiinte, Departament Chimie

Rezumat: Carotenoidele sunt pigmenți galbeni, roșii sau portocalii care sunt răspândiți atât în regnul vegetal cât și în cel animal. Ele însoțesc clorofila verde a frunzelor și ierburilor regnului vegetal și sunt prezenți în multe flori, fructe, semințe sau rădăcini. În număr relativ mare, carotenoidele au fost identificate în țesuturile fotosintetizante (frunze, tulpini, muguri etc.) și în cele nefotosintetizante (fructe, flori, semințe, rădăcini etc.) ale plantelor superioare. Majoritatea celor 80 de carotenoide extrase din plante conțin 40 de atomi de carbon. Doar câteva au molecule mai mici, fiind probabil produși de degradare oxidativă ai carotenoidelor.

Cuvinte cheie: carotenoide, culoare, plante, compoziție chimică, atomi de carbon.

INTRODUCERE

Denumirea de carotenoide provine de la cuvântul carotte (fr.) sau carrot(eng.) care înseamnă morcov. Carotenoidele sunt pigmenți galbeni, roșii sau portocalii care sunt răspândiți atât în regnul vegetal cât și în cel animal. Ele însoțesc clorofila verde a frunzelor și ierburilor regnului vegetal și sunt prezenți în multe flori, fructe, semințe sau rădăcini. În număr relativ mare, carotenoidele au fost identificate în țesuturile fotosintetizante (frunze, tulpini, muguri etc.) și în cele nefotosintetizante (fructe, flori, semințe, rădăcini etc.) ale plantelor superioare. [1-2]

S-a observat, în urma unor cercetări efectuate pe plante, că în țesuturile verzi fotosintetizante se găsesc în mod constant patru carotenoide importante: b-carotenul în proporție de 40%, violaxantina 18%, neoxantina 12%. Carotenoidele se găsesc și în licheni și alge.

Semințele plantelor superioare conțin un număr foarte redus de carotenoide, în majoritatea cazurilor evidențiindu-se luteina și urme de b-carotină. Un conținut mai ridicat și mai variat de carotenoide poate fi regăsit în semințele plantelor leguminoase - semințe de mazăre, fasole verde etc.). Semințele cerealelor sunt sărace în carotenoide având ca și pigment principal luteina, excepție făcând porumbul. Carotina din morcov (*Daucus carota*) a fost izolată în stare cristalizată de Wackenroder în 1831. Iar Berzelius a studiat colorantul galben din frunzele tomnatice în 1937. Dar Willstaetter a observat că acest colorant este întotdeauna însoțit de o hidrocarbura carotina $C_{40}H_{56}$ și de un diol înrudit cu aceasta xantofila $C_{40}H_{56}O_2$. După ce s-a constatat că există o înrudire între carotenoide și vitamina A în 1928 studiul carotenoidelor a fost continuat de P. Karrer, R. Kuhn și L. Zechmeister ducând în final la izolarea, stabilirea structurii și realizarea sintezelor principalelor carotenoide.[2-3]

Majoritatea celor 80 de carotenoide extrase din plante conțin 40 de atomi de carbon. Doar câteva au molecule mai mici, fiind probabil produși de degradare oxidativă ai carotenoidelor. Numărul mare de duble legături conjugate le conferă o culoare specifică care variază de la galben la portocaliu și de la roșu la violet. Pigmentii prezenți în tomate și în morcovi datorită prezentei în molecula lor a dublelor legături conjugate sunt colorați în roșu. Carotenoizii care conțin în molecula lor oxigen (xantofilele) au culoare galbenă. Prezența dublelor legături în molecula carotenoidelor determină o izomerie cis-trans. Ceea ce determină prezența a numeroși izomeri geometrici. Dar majoritatea carotenoidelor prezintă o configurație trans. Lanțul carbonic este constituit din opt unități izoprenice conferindu-le carotenoizilor solubilitatea în grăsimi. De aceea, acestea sunt numite și substanțe lipocrome. Toate carotenoidele absorb lumina în regiunea albastră și ultravioletă a spectrului. [8]

Carotenoidele sunt molecule hidrofobe cu solubilitate mică, sau chiar deloc, în apă. Ele sunt astfel de așteptat să fie restricționate de zonele hidrofobe în celulă, precum interiorul membranelor, exceptând cazul în care în asociație cu proteine sunt prezente într-un mediu apos. Grupele polare funcționale alterează interacțiunea cu alte molecule.[3]

Catena izoprenică a carotenilor se termină la cele două extremități cu două cicluri iononice. Din care unul poate avea o structură α -iononică, iar celălalt este de regulă un ciclu β -iononic. Ciclul β -iononic este necesar pentru caroteni care îndeplinesc funcția de provitamină A. Până în prezent au fost izolate circa 70 de carotenoide și a fost determinată structura a cca 50 dintre ele. Majoritatea au molecule compuse din 40 atomi de carbon și numai câteva au molecule mai mici. Acestea sunt probabil produși de degradare oxidativă ai carotenoidelor propriu-zise. [6]

Carotenoidele se împart în hidrocarburi carotenoidice, $C_{40}H_{56}$, și în derivați oxigenați ai acestora (alcooli, epoxizi, oxizi furanoidici și cetone); o a treia grupă mai cuprinde câțiva acizi carboxilici, conținând în moleculă mai puțin de 40 atomi de carbon. Crotina și xantofila, izolate de Willstaetter și considerate ca substanțe pure, sunt, după cum au dovedit lucrările ulterioare, amestecuri de mai multe substanțe izomere, asemănătoare. Numele de xantofile introdus de Berzelius) a fost păstrat pentru a desemna grupa alcoolilor cu schelet carotenoidic [4]

Sistemul de legături duble conjugate este responsabil de absorbția luminii în domeniul vizibil. Izomerii geometrici ai carotenoidelor pot avea roluri biologice diferite. Majoritatea carotenoidelor naturale sunt în configurație lineară all-trans. Expunerea la lumină și/sau temperatură ridicată poate facilita izomerizarea uneia sau mai multor duble legături, de la forma trans- la forma cis-. Diferențele între izomerii prezenți în alimente și cei prezenți în ser sau în țesuturile umane se pot datora unei absorbții selective sau unei izomerizări in vivo.

Deoarece luteina și zeaxantina nu sunt produși de organismul uman, este necesară administrarea unor suplimente alimentare bogate în astfel de pigmenți datorită proprietăților deosebite pe care le prezintă și a rolului esențial pe care îl îndeplinesc în organismul uman. Astfel, pigmentii clasificați în categoria celor maculari au capacitatea de a oferi protecția necesară fotoreceptorilor retinieni împotriva deteriorării fotochimice. Atunci când ochiul nu prezintă carente de pigmenți carotenoidici, aceștia reușesc să atenueze lumina cu lungimi de undă scurte, prin faptul că funcționează ca niște filtre pentru lumina albastră. [5]

Există suplimente bogate în oxicarotenoizi, care au capacitatea de a capta radicalii liberi. Acestea, acționând în același timp și ca niște antioxidanți, oferă protecție țesuturilor împotriva deteriorării oxidative provocate de lumină.

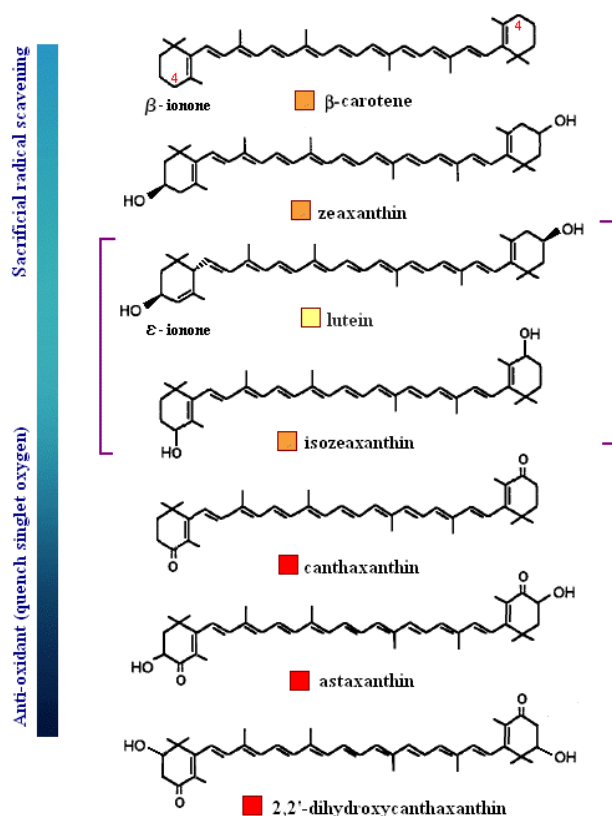


Figura.1. Structura chimică a unor carotenoide.

MATERIALE SI METODE

Pentru separarea unor carotenoide am folosit : mojar cu pistil, cuva cromatografica, placi cromatografice, aparat Soxhlet, agitator magnetic, amestec de solventi.

S-a studiat separarea și identificarea principalelor carotenoide dintr-un extract de frunze de mur (*Rubus fruticosus*). Acest lucru s-a făcut prin cromatografie pe strat subțire (TLC) .



Fig. 2. Fructe si frunze de mur

Frunzele, mugurii, rădăcinile și fructele au utilizări terapeutice în medicina umană și veterinară, cultă și tradițională. Frunzele, mugurii, rădăcinile au proprietăți astringente, antidiareice, dezinfectante, spasmolitice. Efect favorabil în suprimarea spasmelelor intestinale și ale căilor urinare, împiedică înmulțirea bacteriilor, precipită proteinele și realizează o acțiune hemostatică locală, adjuvant în tratamentul afecțiunilor inflamatorii acute ale intestinului, favorizează digestia.[5]

Frunzele conțin: carotenoide, flavonoizi, acizi organici, inositol, arbutina, tanin, Vitamina C. În scop terapeutic, se recoltează lastarii și frunzele tinere, înainte de înflorire sau în timpul înfloririi. Frunzele sunt folosite în industria farmaceutică în compoziția unor preparate antidiabetice.

Prin cromatografia pe strat subțire (CSS), s-a făcut o separare a principalelor carotenoide din frunzele de mur (*Rubus fruticosus*).

Etapele de lucru au fost :

- extracție
- separarea și identificarea principalelor carotenoide

REZULTATE SI DISCUTII

Carotenoidele sunt extrase din probe cu ajutorul solvenților organici miscibili în apă, în special cu acetonă.

Frunzele proaspăt culese de *Rubus fruticosus* s-au lăsat la uscat în condiții de întuneric (într-un dulap de laborator), la temperatura camerei, timp de o săptămână , apoi uscarea s-a continuat la temperatura de 35⁰ C până la o masă de 60 % din masa inițială. Frunzele astfel uscate s-au măcinat foarte fin, într-un mojar cu pistil, până la formarea unei pudre .Aceasta a fost supusă extracției cu acetonă - etanol – apa distilată (3 : 1 : 1 V/V/V) timp de 3 ore, la întuneric pentru a împiedica degradarea carotenoidelor și oxidarea în acest stadiu. Extrasul obținut s-a filtrat, și s-a evaporat până la uscare în Rotovapor , fiind apoi resuspendat în eter etilic.

Saponificarea a avut loc în soluție de eter, prin adăugare de 20% NaOH în metanol, până la o concentrație finală de 10% V/V NaOH. Amestecul s-a agitat, timp de 2 ore, cu ajutorul unui agitator magnetic, apoi carotenoidele au fost extrase de 2 - 3 ori, succesiv, cu eter etilic, până la pH neutru. Astfel s-au eliminat săpunurile, extractul total de carotenoide a fost adus la un volum fix și folosit pentru separarea cromatografică.

Concentrația totală de carotenoide din extractul total (TE) a fost calculată prin compararea absorbantei A ($\alpha_{\max} = 450 \text{ nm}$) cu o absorbanta specifică ($\alpha = 400 \text{ nm}$).

$$X = (A \times Y \times 1000) : (2500 \times 100) = A \times Y / 250$$

unde : X - greutatea carotenoidelor din proba (mg)

Y - volumul probei (ml)

b) În vederea identificării principalelor carotenoide prezente în frunzele de mur, extractul total a fost supus unei analize cantitative, prin măsurarea absorbției la 400 nm. S-a obținut o densitogramă CSS, de unde s-au calculat valorile R_f identificându-se următoarele carotenoide prezente în frunzele de mur: luteina și zeaxantina.

Zeaxantina este un antioxidant puternic care vă protejează împotriva radicalilor liberi. În exces, radicalii liberi vă pot deteriora celulele, pot contribui la îmbătrânire și pot duce la progresia unor boli precum bolile de inimă, cancerul, diabetul de tip 2 și boala Alzheimer.[7]

Zeaxantina prezintă un rol deosebit de important în protejarea ochilor de efectele nocive ale oxidării și daunelor induse de lumină. Este un pigment de culoare galbenă care se găsește în centrul maculei. Contribuția pe care o are zeaxantina constă în construirea unui scut de pigment de culoare galbenă pentru a proteja celulele oculare de efectele nocive ale anumitor surse de lumină, cum ar fi soarele.

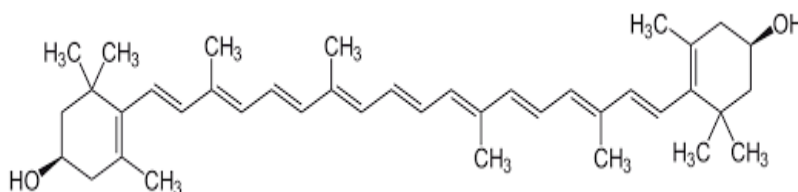


Figura 3. Structura chimică a zeaxantinei

Luteina este o vitamină carotenoidă, un antioxidant natural extrem de important pentru menținerea unei vederi sănătoase. Luteina este pigmentul principal care se găsește în zona centrală a retinei, macula (pata galbenă), o zonă de sensibilitate vizuală maximă. Pe măsură ce îmbătrânim, celulele cu pigment retinal devin mai puțin eficiente, retina degenerază și vederea centrală se pierde treptat. Acest proces este cunoscut sub numele de degenerescență maculară legată de vârstă (DMLV). O cauză principală a degenerescenței maculare legată de vârstă este deteriorarea produsă de radicalii liberi în lumina soarelui. Luteina este cea care întărește sistemul cardiovascular și peretii capilarelor, prevenind maladiile cardiovasculare și arterioscleroza (afecțiune ce se manifestă prin îngroșarea pereților arterelor, sclerozarea și pierderea elasticității acestora). Astfel contribuie la ameliorarea simptomelor asociate bolilor cardiovasculare și la diminuarea riscurilor de apariție a infarctului miocardic.[7]

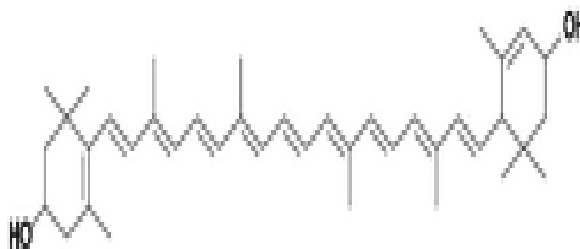


Figura. 4. Structura chimică a luteinei

În vederea separării și identificării carotenoidelor din frunzele de mur s-au folosit plăci cu celuloză.

Pregătirea plăcilor de celuloză se face astfel: se cântăresc la balanța farmaceutică 15 g pulbere de celuloză microcristalină (Merck) la care se adaugă 40 ml apă și 7 ml alcool metilic.

Dacă suspensia de celuloză este preparată numai în apă, după uscare stratul aderent al acesteia pe suportul inert de sticlă se fisurează, ceea ce împiedică migrarea sistemului de fază mobilă prin întreruperea capilarelor formate de-a lungul fazei staționare. Suspensia formată se supune

omogenizării folosind un agitator magnetic, timp de 25 minute la cald. Pasta omogenă rezultată se întinde cu ajutorul aparatului de întins straturi subțiri, pe plăci de 20 x 10 cm, care în prealabil au fost degresate pentru prizarea fazei staționare pe suportul inert. Plăcile astfel obținute se lasă să se usuce la temperatura camerei, pe o suprafață perfect plană, timp de 24 ore, apoi în etuvă la 80°C, timp de 15 minute.

Grosimea stratului de fază staționară (celuloza microcristalină) a fost reglată la 0,3 mm.

b) În vederea obținerii cromatogramei CSS, s-a aplicat câte 3 μ l din soluțiile standard ale celor 2 carotenoide, cu ajutorul unor micropipete, pe plăci de sticlă 10 x 10 cm. Eluția s-a efectuat într-o cameră N – nesaturată, folosind ca fază mobilă sistemul format din eter de petrol – acetonă (60 : 40 v/v), proaspăt preparate și amestecate înainte de eluție, în raport de 1:1. Timpul de eluție a fost de 40 minute, iar distanța de migrare de 5 cm.

După dezvoltare, placa a fost uscată mai întâi, într-un curent de aer cald și apoi pulverizată cu o soluție de ninhidrină 2,5% în alcool etilic. S-a încălzit în etuvă, la 70°C, timp de 20 minute, obținându-se o culoare albastru - violet. S-a examinat în lumină UV, la 360 nm, iar separarea obținută se observă în următoarea cromatogramă (fig.5).

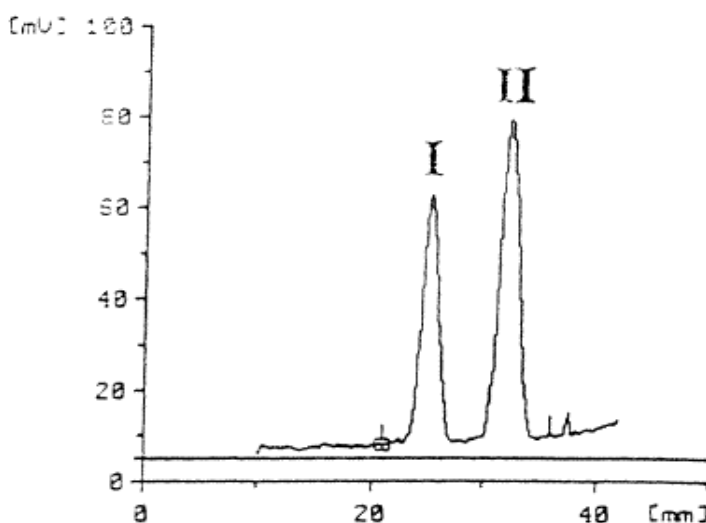


Figura. 5. Cromatograma CSS a extractului total. Carotenoidele identificate sunt: 1-luteina; 2- zeaxantina;

CONCLUZII

Scopul acestei lucrări a fost acela de a găsi o metodă de extracție simplă, cuplată cu o metodă de separare și identificare eficientă a carotenoidelor din extractul de frunze de mur, folosite în industria farmaceutică. Pe baza rezultatelor obținute prin cromatografia pe strat subțire, este posibil să se evalueze compoziția cantitativă și calitativă privind carotenoidele din extractul vegetal de *Rubus fruticosus*. Cromatografia pe strat subțire oferă unele avantaje semnificative comparative cu alte metode cromatografice convenționale și anume: este simplă, relativ rapidă, suficient de sensibilă și poate fi folosită fără un tratament special al probei.

Din cromatogramă se constată că pentru fiecare carotenoidă prezentă în extract, picul corespunzător acestuia a crescut proporțional cu contribuția concentrației fiecăruia din extract. Unii componenți apar mai intens colorați, alții mai puțin intens, având legătură cu sensibilitatea reacției componentului dat cu reactivul utilizat.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Jercan E. (1983) *Metode de separare în chimia analitică*, Ed. Tehnică, București,
- [2] Gocan S., Hodișan T., Nașcu H. (1977). *Metode analitice de separare*, Univ. Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca
- [3] Gocan S. *Metode de separare*, Cluj-Napoca, 1989.
- [4] Sherma, B. Fried, (2003). *Handbook of Thin-Layer Chromatography*, 3rd Edition, Revised and Expanded, Marcel Dekker Inc., New York, *Cromatographic Science Series*, Vol.89

- [5] www.angy.ro/.../Ce-sunt-carotenoidale-si-care-sunt-beneficiile-acestora
- [6] <https://sites.google.com/site/totuldesprecarotenoidale>
- [7] Nenișescu C. D. (1980). *Chimie organică*, Vol II,
- [8] <https://www.scribd.com/doc/59731233/Carotenoidale>

DETERMINAREA CONSTANTEI DE STABILITATE A COMPLEXULUI IONILOR DE ARGINT CU MOLECULE DE AMONIAAC

Mihaela Diana SCARLAT¹, Amalia Diana ȘANDOR¹, Oana CHIȘE¹,
Gabriela Elena BADEA², Alexandrina FODOR²

¹studenți licență Chimie anul III, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea

²profesori coordonatori Departamentul de Chimie, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea

Rezumat: În această lucrare s-a determinat raportul de combinare și constanta de stabilitate a unui complex dintre ionii de argint și moleculele de amoniac. Raportul de combinare dintre amoniac și ionii de argint a fost obținut în urma unui studiu conductometric. Pentru găsirea constantei de stabilitate s-a utilizat un amestec de reacție cu exces de amoniac, din care, prin titrare conductometrică cu o soluție de clorură s-a determinat concentrația ionilor de argint rămași în soluție necomplexați. Pe baza acestor date s-a putut determina concentrațiile tuturor speciilor din soluția de complexare, aflate în echilibru și s-a obținut valoarea constante de stabilitate.

Cuvinte cheie: argint, amoniac, compus coordinativ, conductometrie

INTRODUCERE

Constanta de stabilitate în cazul combinațiilor complexe reprezintă un parametru foarte important deoarece oferă informații utile cu privire la gradul de disociere a complexului atunci când se găsește în soluție apoasă și contribuie la determinarea reactivității combinației complexe [1-3]. Constanta de stabilitate depinde de natura cationului implicat, de natura liganzilor, dar și de interacțiunea care poate să apară între cei doi parteneri implicați în realizarea combinației complexe.

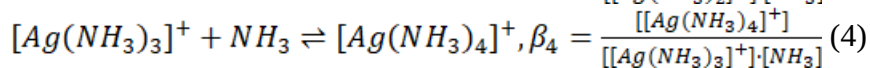
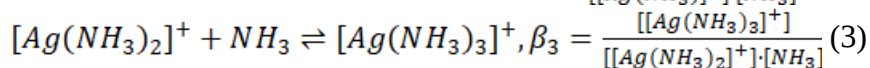
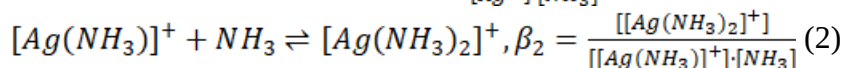
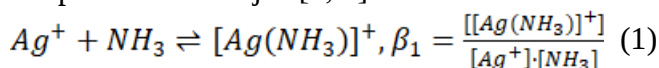
Studiul pentru aflarea constantei de stabilitate a unei combinații complexe poate cuprinde mai mulți factori [4-7]:

- determinarea raportului de combinare, care poate constitui un aspect foarte important atunci când cei doi parteneri, cationul metalic și liganzii se pot combina în mai multe rapoarte, altfel spus pentru aceeași se cunosc mai multe posibilități de combinare. Deoarece în acest caz ligandul ales este unul monodentat, molecula de amoniac, care cedează doar o pereche de electroni, raportul de combinare ales coincide cu numărul de coordinare [8-9].
- Determinarea factorilor care intervin asupra formării complexului și stabilității sale în soluție apoasă, care pot fi: temperatura, pH-ul, prezența anionului comun, dacă este cazul, exterior sferei de coordinare [2-4, 6-8]

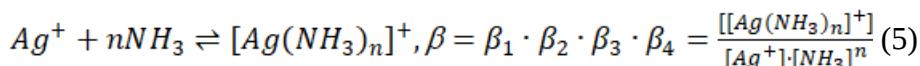
Determinarea constantei de stabilitate, care se poate realiza pe mai multe căi, după metode diferite în care se va ține cont de principii ale termodinamicii și cineticii reacțiilor chimice.

Reacțiile de formare a combinațiilor complexe sunt reacții de echilibru care decurg în mai multe etape succesive, în care se leagă pe rând câte o moleculă de ligand la ionul metalic central [1-5]

Conform datelor din literatură, ionii de argint pot forma cu moleculele de amoniac complecși cu numere de coordinare de la 1-4, iar constantele corespunzătoare de echilibru sunt prezentate mai jos [3, 7]:



În concluzie reacția globală la legarea unui număr n de molecule de amoniac și constanta de stabilitate este:



Constanta de stabilitate depinde de raportul în care se găsesc în soluție, la atingerea stării de echilibru concentrațiile de complex arginto-amoniacal cu concentrațiile ionilor de argint și amoniac, rămase în soluție, sub formă necomplexată.

În această lucrare ne-am propus să determinăm următoarele:

- 1) Raportul de combinare dintre numărul de molecule de amoniac și cel de ioni de argint, adică valoarea lui n , numărul de coordinare;
- 2) Să aflăm valoarea constantei de stabilitate a complexului arginto-amoniacal format

PARTE EXPERIMENTALĂ

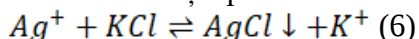
1. Determinarea raportului optim de combinare dintre $Ag(I)$ și amoniac prin metoda conductometrică

Într-un pahar Berzelius mic, așezat pe plita unui agitator magnetic se introduc 50 ml de soluție de azotat de argint 0,01 M. Se pornește agitarea, se deschide conductometrul și se selectează domeniul de lucru pentru determinarea conductivității. Se măsoară conductivitatea inițială a soluției de azotat de argint din paharul Berzelius și se notează valoarea. Cu o pipetă se introduce 0,25 mL din soluția de amoniac 1 M în paharul Berzelius cu proba de azotat de argint, se agită și se citește valoarea conductivității. Se repetă citiri succesive pentru diferite rapoarte de combinare, sub agitare. Cu valorile obținute pentru conductivități se trasează un grafic de variație a conductivității în funcție de raportul molar de combinare $NH_3/Ag(I)$. Determinarea conductivității a fost realizată cu un conductometru de tip InoLab Multi720 [10-11].

2. Determinarea constantei de stabilitate a complexului $Ag(I)$ cu amoniac

Într-un balon cotat de 50 mL se adaugă 10 mL soluție de $AgNO_3$ 0,01M și 9 mL de amoniac soluție de concentrație 2M. Amestecul se aduce la cotă cu apă distilată. Se închide balonul cu dop, se agită amestecul și se lasă să reacționeze la temperatura camerei timp de 10 minute. După 10 minute amestecul de reacție se trece cantitativ într-un pahar Berzelius. Se măsoară conductivitatea amestecului inițial de reacție, apoi se titrează cu o soluție de KCl 0,01 M sub agitare. Titrarea se efectuează conductometric utilizând multimetrul InoLab Multi720. Pentru efectuarea titrării conductometrice, soluția de KCl a fost adăugată în cantumuri de câte 0,2 mL. S-a reprezentat grafic variația conductivității în funcție de volumul de KCl adăugat [12].

Prin titrare conductometrică a soluției de complex arginto-amoniacal au fost precipitați sub formă de $AgCl$ doar acei cationi de argint rămași necomplexați la echilibru, în condițiile unui exces substanțial de ioni de amoniac. Reacția chimică de determinare a concentrației de ioni de argint liberi din soluție prin titrare cu KCl este:



Deoarece s-a adăugat amoniac într-un exces semnificativ mai mare, echilibrul de formare a ionului complex argintoamoniacal a fost mult deplasat spre dreapta, adică majoritatea cationilor de $Ag(I)$ au trecut sub formă de complex, iar concentrația cationilor liberi de argint în soluție a rămas foarte mică. În aceste condiții singurele metode de determinare a ionilor de argint liberi sunt cele instrumentale, ca de exemplu metoda utilizată de noi, cea conductometrică.

REZULTATE ȘI DISCUȚII

1. Determinarea raportului optim de combinare dintre $Ag(I)$ și amoniac prin metoda conductometrică

Din metoda conductometrică, din reprezentarea grafică a variației conductivității în funcție de raportul molar de combinare NH_3/Ag^+ s-a obținut un grafic alcătuit din două drepte cu un punct de intersecție corespunzător unui număr de coordinare egal cu 4, ceea ce corespunde unui ion complex cu formula moleculară $[Ag(NH_3)_4]^+$. Așa cum se poate vedea în Figura 1, prima dreaptă este descendentă și corespunde unei scăderi a conductivității la adăugarea de amoniac. Această scădere a conductivității amestecului de reacție este datorat formării ionului complex, cu o mobilitate ionică mai mică decât cea a soluției inițiale de ioni de argint, care sunt prinși prin coordinarea moleculelor de amoniac. A doua pantă este una ascendentă datorită adăugării soluției de amoniac în exces, situație în care contribuția la conductivitate este asociată mobilității mai mari a ionilor amoniu și hidroxid din soluția apoasă a amoniacului.

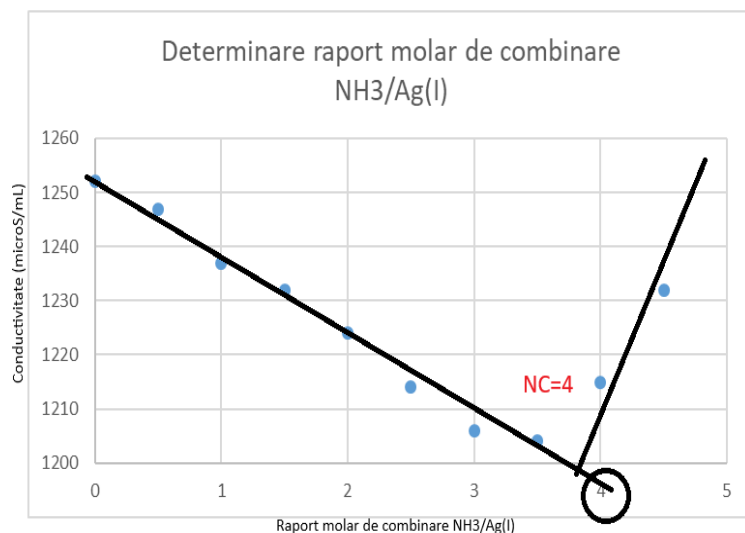
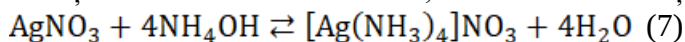
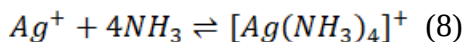


Figura 1. Determinarea raportului de combinare dintre amoniac și cationii de Ag(I) la formarea complexului coordinativ

Reacția chimice care au avut loc, conform datelor obținute din experimentul de mai sus este:



Conform datelor obținute mai sus, reacția generală utilizată pentru determinarea constantei de stabilitate este:



Constanta de stabilitate a complexului pentru reacția de mai sus devine:

$$\beta = \frac{[\text{Ag}(\text{NH}_3)_4]}{[\text{Ag}^+][\text{NH}_3]^4} \quad (9)$$

S-a determinat volumul de KCl 0,01 N utilizat la titrarea ionilor de argint prin metoda conductometrică, fiind la punctul de intersecție a dreptelor rezultate la titrare. În figura 2 se poate vedea că la formarea precipitatului de clorură de argint s-a înregistrat o creștere ușoară a mobilității ionice, pe seama mobilității ionilor de potasiu rezultați în urma reacției de precipitare, urmată de o creștere bruscă la adăugarea soluției de clorură de potasiu în exces, aici intrând în discuție și mobilitatea suplimentară a anionilor clorură.

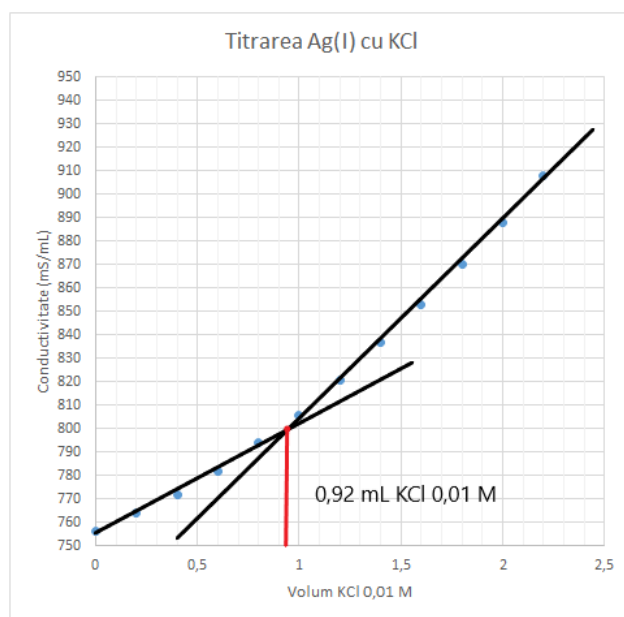


Figura 2. Determinarea concentrației de ioni de argint liberi din soluția de formare a ionului complex $[\text{Ag}(\text{NH}_3)_4]^+$ la echilibru

Din valoarea volumului soluției de KCl 0,01 M utilizată la titrare se determină numărul de moli de clorură egal cu numărul de moli de argint liberi în soluția de complex, conform reacției (6) de precipitare a clorurii de argint:

$$(n_{Ag})_{(aq)} = (n_{Cl})_{titrare} = C_{KCl} \cdot (V_s)_{KCl} = 0,01 \cdot 0,92 \cdot 10^{-3} = 9,2 \cdot 10^{-6} \text{ moli} \quad (10)$$

În concluzie, concentrația ionilor liberi de argint din amestecul de complexare obținut în balonul de 50 mL este:

$$[Ag^+]_{(aq)} = \frac{(n_{Ag})_{(aq)}}{V_s} = \frac{9,2 \cdot 10^{-6} \text{ moli}}{50 \cdot 10^{-3} \text{ L}} = 0,184 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L} \quad (11)$$

Concentrația inițială a ionilor de argint din balonul cotat de 50 mL, rezultată prin utilizarea a 10 mL soluție de AgNO₃ 0,01 M este egală cu:

$$[Ag^+]_{inițial} = \frac{\text{număr moli } Ag^+}{V_s} = \frac{0,01 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L} \quad (12)$$

Mai mult, concentrația inițială a ionilor de argint se va găsi în cea mai mare parte sub formă de complex cu amoniacul, dar și sub formă liberă, necomplexată, datorită echilibrului de formare a complexilor. Toate cele trei forme sunt solubile în apă distilată:

$$[Ag^+]_{inițial} = [Ag^+]_{(aq)} + [Ag(NH_3)_4] \quad (13)$$

Concentrația de ioni de argint complexați cu amoniacul, pe baza rezultatelor cumulate ale ecuațiilor (10-13) devine:

$$[Ag(NH_3)_4] = [Ag^+]_{inițial} - [Ag^+]_{(aq)} = 2 \cdot 10^{-3} - 0,184 \cdot 10^{-3} = 1,816 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L} \quad (14)$$

Amoniacul a fost adăugat în exces considerabil în amestecul de reacție comparativ cu soluția de ioni de argint. În balonul cotat cu volumul de 50 mL s-au introdus 9 mL soluție de NH₃ 2 M, ceea ce corespunde la o concentrație inițială echivalentă de ioni de amoniac de:

$$[NH_3]_{inițial} = \frac{9 \text{ mL} \cdot 2 \text{ mol/L}}{50 \text{ mL}} = 0,36 \text{ mol/L} \quad (15)$$

În cazul amoniacului, ca și pentru ionii de argint, cantitatea inițială a sa în urma complexării se găsește sub formă de complex, de data aceasta într-un procent mai mic, și cea mai mare parte a rămas în soluție necomplexat, conform ecuației de mai jos:

$$[NH_3]_{inițial} = [NH_3]_{(aq)} + 4[Ag(NH_3)_4] \quad (16)$$

În acest caz concentrația de amoniac rămasă liberă în soluție devine:

$$[NH_3]_{(aq)} = [NH_3]_{inițial} - 4[Ag(NH_3)_4] = 0,36 - 4 \cdot 0,001816 = 0,3600 - 0,0073 = 0,3527$$

$$[NH_3]_{(aq)} \approx [NH_3]_{inițial} = 0,36 \text{ mol/L} \quad (17)$$

Concentrația ionului complex este de aproape 200 de ori mai mică decât cea a ionilor de amoniac utilizați la prepararea sa, chiar dacă contribuția acestora este de 4 ori mai mare decât cea a ionilor de argint și implicit decât a cea a numărului de molecule de complex formate. În aceste condiții concentrația inițială a moleculelor de amoniac variază foarte puțin la complexare cu ionii de argint, astfel că cea mai mare parte a moleculelor de amoniac se găsesc sub formă liberă în soluție și concentrația acestora se poate considera echivalentă concentrației inițiale a moleculelor de amoniac (ec. 17).

Odată ce se cunosc concentrațiile tuturor ionilor la echilibru se poate determina valoarea constantei de stabilitate, β :

- din ecuația (11) s-au determinat ionii de argint liberi din amestecul de complexare:

$$[Ag^+]_{(aq)} = 0,184 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L}$$

- din ecuația (14) s-a determinat concentrația ionului complex:

$$[Ag(NH_3)_4] = 1,816 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L}$$

- din ecuația (17) s-a aflat concentrația moleculelor de amoniac rămase necomplexate în amestecul de reacție:

$$[NH_3]_{(aq)} = 0,36 \text{ mol/L}$$

Înlocuind cele trei valori obținute în ecuația constantei de stabilitate (9) se obține:

$$\beta = \frac{[Ag(NH_3)_4]}{[Ag^+][NH_3]^4} = \frac{1,816 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L}}{0,184 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L} \cdot (0,36 \frac{\text{mol}}{\text{L}})^4} = 587,6 \text{ (L/mol)}^4$$

unde $\lg\beta$ este 2,77, adică este o constantă de stabilitate de ordin aproape 3.

Toate rezultatele obținute experimental și din calcule pe parcursul determinării constantei de stabilitate sunt centralizate în tabelul de mai jos:

Tabel 1. Determinarea constantei de stabilitate și concentrațiile speciilor existente în soluția de complexare la echilibru

V_{KCl} (ml)	n_{KCl} $n_{Ag(I)}$ (moli)	$[Ag^+]_{(aq)}$ (mol/L)	$[Ag^+]_{inițial}$ (mol/l)	$[Ag(NH_3)_4^+]$ (mol/l)	$[NH_3]_{inițial}$ (mol/L)	$[NH_3]_{(aq)}$ (mol/L)	n	β	$\lg\beta$
9,2	$0,92 \cdot 10^{-6}$	$0,184 \cdot 10^{-3}$	0.002	$1,816 \cdot 10^{-3}$	0.36	0,36	4	587,6	2,77

CONCLUZIE

În cazul formării complexului $[Ag(NH_3)_4]^+$ constanta de stabilitate are o valoare mare de 587,6, adică este o constantă de stabilitate de ordin aproape 3, ceea ce arată că formarea complexului ionilor de argint cu moleculele de amoniac este un complex foarte stabil, puțin disociabil în soluție apoasă, așa cum se poate observa și din cantitatea foarte mică de cationi de argint liberi în soluția apoasă a complexului, identificați prin titrare conductometrică cu clorura de potasiu. Experimente de tip titrare clasică, volumetrică cu soluție de clorură, efectuate în paralel nu au putut evidenția formarea vizibilă a unui precipitat de clorură de argint, concentrația ionilor de argint s-a aflat sub limita de detecție ochiometrică a acestuia.

Metoda conductometrică s-a dovedit a fi foarte utilă atât la determinarea raportului de combinare dintre amoniac și ionii de argint în obținerea unui ion complex, cât și în aflarea constantei de stabilitate a complexului.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Katsumi H. (1994), *Conditional stability constants of metal complexes of organic ligands in sea water: past and present, and a simple coordination chemistry model*. Analytica Chimica Acta 284.3 pp. 621-634
- [2] Rupprecht S. etc. (1996), *Coordination chemistry of bis-thiohydroxamic acids: synthesis and characterization of their lead (II) complexes and stability constant determination*. Inorganica chimica acta, Vol.243, No.1-2, pp.79-90
- [3] Sigel R. KO, Helmut S. (2010), *A stability concept for metal ion coordination to single-stranded nucleic acids and affinities of individual sites*. Accounts of chemical research, Vol. 43, No.7, pp. 974-984
- [4] Kettle S. F. A., Kettle S. F. A.. (1996). Stability of coordination compounds. *Physical Inorganic Chemistry: A Coordination Chemistry Approach*, pp. 73-94
- [5] Nagaj, Justyna, et al. (2013), *Revised coordination model and stability constants of Cu (II) complexes of tris buffer*. Inorganic Chemistry, Vol.52, No..24, pp. 13927-13933.
- [6] Abu-Shandi K., Al-Wedian F. (2009), *Estimation of composition, coordination model, and stability constant of some metal/phosphate complexes using spectral and potentiometric measurements*. Chemical Papers, Vol.63, pp. 420-425.
- [7] Srivastva A. N. (2020) *Stability and Applications of Coordination Compounds*. BoD—Books on Demand
- [8] Kuz'mina I. A., Kovanova M.A., Nikiforova S.O. (2024), *Predictive calculation of the stability constants of silver (I) ion with pyridine and 2, 2'-bipyridyl in a solvent environment*. Polyhedron, 117265.
- [9] Babel L., Bonnet-Gómez S., From K.M. (2020), *Appropriate buffers for studying the Bioinorganic Chemistry of silver (I)*. "Chemistry, Vol.2, No.1, pp.193-202.
- [10] De Filippo G. (2005): etc *Complexes of Ag⁺ with mixed donor phenanthroline-containing macrocycles: spectrofluorimetric, spectrophotometric, conductometric and potentiometric studies*. Inorganica chimica acta, Vol. 358, No..3, pp. 801-807.
- [11] Rahimi-Nasrabadi M., etc. (2009), *Conductometric study of complex formations between some substituted pyrimidines and some metal ions in acetonitrile and the determination of thermodynamic parameters.*, Journal of Molecular liquids, Vol.144.1-2, pp. 97-101.
- [12] Rezwani, M.M. etc. (2017), *Conductometric studies of kinetics of ionic reaction between Ag⁺ And Cl⁻ in aqueous solution.*, Vol 6, pp. 52-56.

STUDII PRIVIND ANALIZA FIERULUI DIN PROBE DE SOL

Maria CĂRĂBAN¹, Alexandru BADEA², Mioara SEBEȘAN³, Oana STĂNĂȘEL³

¹studentă master Chimie structurală și aplicativă, Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe

²student Chimie, Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe

³profesor coordonator, Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe, Departamentul de Chimie

Rezumat: *Excesul sau carența unui mineral în compoziția solului are implicații asupra culturilor posibile la suprafața acestuia. Fierul, foarte răspândit în scoarța terestră, are rol în dezvoltarea plantelor, ceea ce impune o cunoaștere a concentrației acestuia în sol. În prezenta lucrare s-au analizat probe de sol prelevate selectiv, metoda de lucru aplicată fiind spectrofotometria în VIS.*

Cuvinte cheie: *fier, sol, metoda spectrofotometrică.*

INTRODUCERE

Sub aspect fizic, solul este format din particule solide de forme și dimensiuni variabile, iar din punct de vedere chimic se poate afirma că solul conține totalitatea substanțelor chimice cunoscute. Cantitatea și varietatea acestor substanțe răspândite în sol diferă de la un sol la altul.

Solul este în interdependență cu atmosfera, hidrosfera și biosfera. Ca urmare, cea mai mare parte a substanțelor chimice trec din sol în aer, dar mai ales în apă și vegetale. Consecința firească a acestui fenomen este încărcarea mai mare sau mai mică a apei și plantelor cu diferite minerale. În scoarța pământului se desfășoară procese chimice și biologice. Fierul influențează fotosinteza, fosforilarea oxidativă și metabolismul azotului, catalizează biosinteza pigmentilor clorofilieni și carotenoizi. Fierul ajuns în sol la început se prezintă sub formă de flocoane, iar din cauza umezelii și a reacțiilor de oxido-reducere care au loc, precum și a scăderii pH-ului solului, trece sub formă solubilă. Ionii de fier dizolvabili se găsesc, în general, sub formă de bicarbonați sau complecși organo-metalici. Sub această formă, fierul poate pătrunde în apele de profunzime, determinând creșterea concentrației în acest element a surselor de apă.

Consumul de oxigen din apă este intens în procesele de oxidare a sulfurilor și a unor compuși oxigenați din compoziția rocilor și minereurilor, care conțin metale cu valențe inferioare, ca: Fe^{2+} , Mn^{2+} , etc. Prin oxidare, trec în ioni cu valențe superioare, are loc slăbirea legăturilor în rețeaua cristalină, având loc descompunerea completă a substanțelor oxidate, cu formarea de compuși noi, solubili sau insolubili. Sulfatii, carbonatii, intră în reacție cu apa, hidrolizează, având loc precipitarea cationilor metalelor sub formă de hidroxizi greu solubili. Dintre cationii care formează oxizi și hidroxizi, cationii Fe^{2+} prezintă o mare importanță pentru sol, deoarece trec ușor în soluții acide și în medii alcaline și precipită sub forma unor depuneri cristaline de hidroxizi sau săruri bazice sau neutre.

Excesul sau carența minerală a solului va determina excesul sau carența minerală a apei și alimentelor vegetale, ceea ce se va răsfărânge și asupra animalelor și, în final, asupra omului, consumatorul tuturor acestor produse.

Accesibilitatea fierului pentru plante este influențată de pH-ul solului, de gradul de aerație al acestuia și de materiile organice din sol. Solubilitatea fierului crește în mediu acid, iar în cel alcalin prezența ionilor Fe^{2+} este redusă. La un pH mai mare de 8 se înregistrează carențe de fier în sol, cu consecințe grave asupra nutriției plantelor.

Deficiența de fier apare mai ales în solurile reci, umede, în fazele de început ale creșterii, când activitatea microbiologică și creșterea este limitată. Pe măsură ce solul se încălzește, activitatea microbiologică se amplifică, iar plantele pot absorbi mai mult fier. Totodată, printr-o activitate microbiologică intensă se asigură reducerea excesului de oxigen din solurile acide, iar unii oxizi și hidroxizi ferici vor fi reduși și transformați în compuși feroși solubili. În solurile alcaline, activitatea microbiană poate produce suficient bioxid de carbon, care în reacție cu apa formează bicarbonați. Ionii de bicarbonat absorbiți de către plantă vor imobiliza fierul în interiorul plantei, ducând la apariția deficienței de fier în sol. Prezența materiei organice este favorabilă solului, deoarece

microorganismele contribuie la descompunerea materiei organice, astfel, fierul legat sub formă de compuși organici, va fi eliberat în forme mai ușor de asimilat pentru plante.

MODUL DE LUCRU

Au fost prelevate probe de sol din județul Bihor, din zona satului Sînlazăr, în vederea analizei conținutului de fier. Punctele de prelevare sunt ilustrate în figura 1. Au fost selectate: o zonă destinată culturilor de porumb (punctele 1, 2 și 3), o zonă din apropierea râului Barcău (punctele 4, 5 și 6) și o zonă lângă o pădure și un lac (punctele 7, 8 și 9). Probele de sol au fost recoltate de la adâncimi diferite, urmărindu-se dacă există o variație a conținutului de fier atât în funcție de loc, cât și de adâncime.



Figura 1. Harta prelevării probelor

După uscarea probelor, acestea au fost cântărite, pregătindu-se eșantioane de câte 10 g. Fiecare probă a fost tratată cu 1 g de cărbune activ și 25 ml reactiv Morgan. Soluția de reactiv Morgan s-a obținut prin amestecarea a 100 g acetat de sodiu cu 30 ml acid acetic glacial și apă ultrapură într-un balon cotat de 1 l. S-a agitat fiecare probă cu ajutorul agitatorului magnetic, timp de 30 de minute. S-a filtrat apoi fiecare probă. Din filtrat s-au pipetat câte 10 ml și s-au introdus în eprubete.

S-au pregătit 100 ml soluție de hidroxilamină de concentrație 10% și 100 ml soluție de ortofenantrolină 0,1%. În fiecare eprubetă s-a adăugat soluție de hidroxilamină (0,5 ml) și soluție de ortofenantrolină (2 ml). S-a agitat eprubeta după adăugarea fiecărui reactiv, după care s-a lăsat 10-15 minute pentru a se dezvolta culoarea, odată cu formarea complexului.

Metoda de analiză aplicată a fost metoda spectrofotometrică în VIS, pregătindu-se soluții etalon de fier. Acestea, la fel ca probele de analizat, au fost tratate cu hidroxilamină și ortofenantrolină. S-a preparat soluția stoc pentru fier prin cântărirea a 0,1404 g sare Mohr, care s-a dizolvat în cca 40 ml apă ultrapură într-un balon cotat de 100 ml; s-au adăugat 3 ml H_2SO_4 98% și s-a completat la semn cu apă ultrapură. 1 ml din această soluție conține 0,2 mg Fe (II). Din soluția

stoc s-a făcut o diluție cu reactiv Morgan, obținând 50 ml soluție etalon de lucru cu 0,01 mg Fe la 1 ml soluție. Obținerea soluțiilor etalon și pregătirea acestora în vederea analizei spectrofotometrice s-a realizat conform datelor din tabelul 1. Principiul metodei spectrofotometrice de determinare a fierului are la bază faptul că ionii de fier bivalent (Fe^{2+}) reacționează cu ortofenantrolina cu care formează un complex având o colorație roșie, ce absoarbe lumina la lungimea de undă de 510 nm, față de o probă martor preparată din 10 ml reactiv Morgan, 0,5 ml hidroxilamină și 2 ml soluție de ortofenantrolină.

Tabelul 1. Pregătirea soluțiilor etalon în vederea analizei spectrofotometrice

Vol. soluție etalon de lucru, ml	0	0,5	1	2	4
Conc. Fe^{2+} , μg	0	5	10	20	40
Volum reactiv Morgan, ml	10	9,5	9	8	6
Volum hidroxilamină 10%, ml	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
Vol. ortofenantrolină 0,1%, ml	2	2	2	2	2

REZULTATE ȘI DISCUȚII

Curba de calibrare rezultată pe baza celor patru soluții etalon este redată în figura 2. S-au determinat concentrațiile de fier din probele de filtrat pe baza curbei de etalonare. S-a făcut calculul concentrației raportat la 1 g probă de sol. Rezultatele obținute pentru probele prelevate sunt prezentate în tabelul 2, iar ilustrarea grafică a concentrațiilor de fier din soluri în funcție de adâncimea de recoltare este dată în figurile 3, 4 și 5.

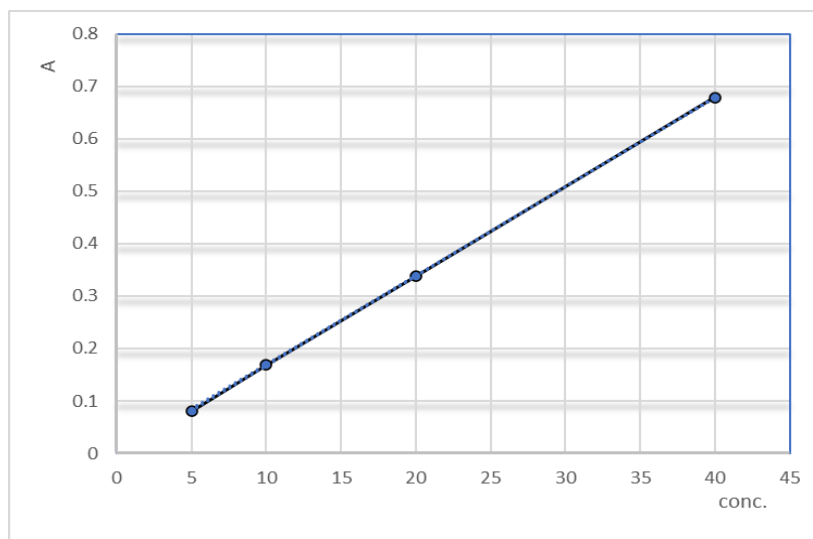


Figura 2. Curba de calibrare la analiza fierului din sol

Tabelul 2. Rezultatele determinărilor

Adâncimea, cm	Locul prelevării	Fe, μg /g sol	Locul prelevării	Fe, μg /g sol	Locul prelevării	Fe, μg /g sol
0-10	1	1,6627	4	7,7692	7	27,1360
10-20	1	1,5680	4	6,7041	7	15,4792
20-30	1	1,3076	4	4,4023	7	7,8343
0-10	2	4,9053	5	7,1183	8	24,6331
10-20	2	2,5502	5	8,3609	8	32,7869
20-30	2	2,5029	5	2,5621	8	18,5325
0-10	3	8,4437	6	11,2958	9	9,37278
10-20	3	6,5502	6	10,7100	9	7,76923
20-30	3	6,1775	6	4,7514	9	6,6449

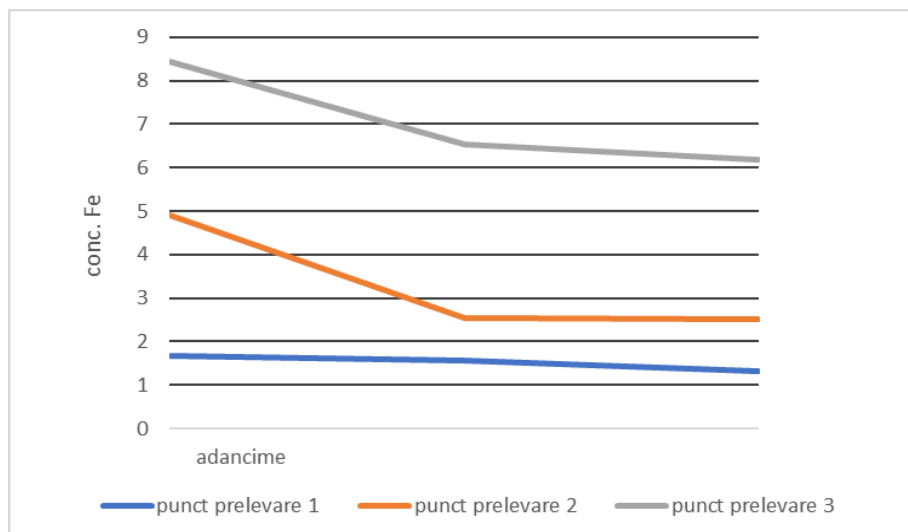


Figura 3. Rezultate ale analizei fierului

Din figura 3 se observă o concentrație mai mare a fierului spre suprafață, în probele de sol prelevate de la adâncimi de 0-10 cm, ceea ce este bine pentru culturi, întrucât plantele își asimilează fierul în jurul rădăcinii, în zona cultivată asigurându-se astfel necesarul de fier.

În cazul probelor 4-6 prelevate din apropierea râului, concentrațiile de fier sunt ușor mai ridicate (figura 4), ceea ce poate fi o consecință a creșterii umidității solului. La proba selectată din punctul de prelevare 9 se constată valori ale concentrațiilor de fier apropiate de cele din punctul 4 de colectare, pe când la punctele de prelevare 7 și 8 se înregistrează cele mai ridicate valori ale concentrațiilor de fier, cu atât mai mari cu cât sunt mai apropiate de suprafață (figura 5). Totodată, probele din punctele 7 și 8 au fost colectate din solurile cele mai apropiate de o sursă de apă. La măsurarea acidității acestor soluri, cel mai scăzut pH s-a determinat la solurile din punctele 7 și 8.

În toate cazurile s-a observat o scădere a concentrației de fier cu adâncimea.

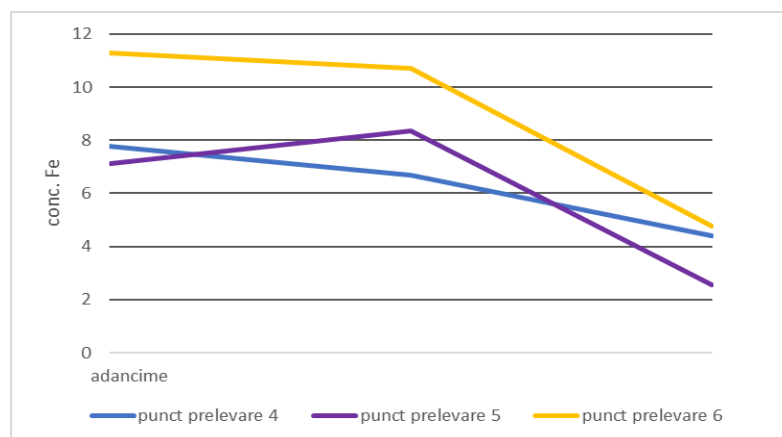


Figura 4. Rezultate ale analizei fierului

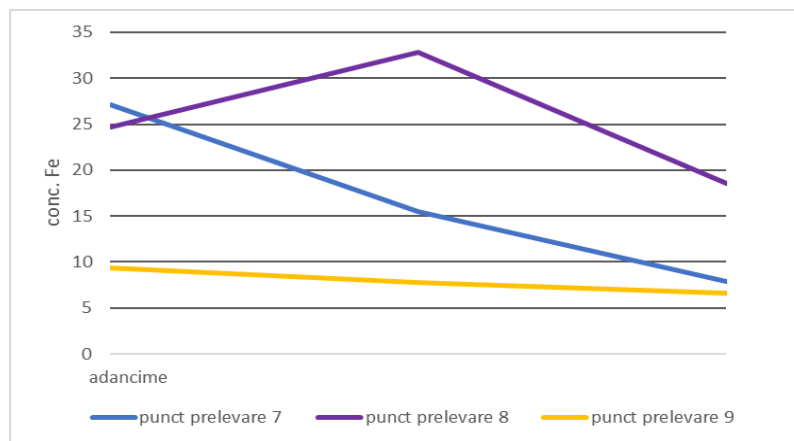


Figura 5. Rezultate ale analizei fierului

CONCLUZII

Fierul este oligoelementul cu cea mai mare disponibilitate în sol. Fierul este implicat în procesele fiziologice ale plantelor, carența sau excesul de fier din sol determinând dezechilibre în sinteza clorofilei, în procesul de respirație al plantelor. De aceea, în zone cultivate sau care sunt explorate în vederea cultivării, este indicată o verificare a concentrației de fier din sol.

În prezenta lucrare au fost analizate spectrofotometric probe de sol prelevate dintr-o zonă agricolă și din alte zone potențial agricole situate de-a lungul râului Barcău. Experimental s-a constatat o concentrație mai mare a fierului la suprafață, valorile scăzând odată cu creșterea adâncimii. Se poate aprecia faptul că valorile înregistrate la probele de sol de pe parcelele cultivate se încadrează în valori optime de concentrație pentru plante, iar cele din două puncte de prelevare de pe terenuri necultivate au indicat un exces al fierului în sol.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Berchez O., Hodișan M.F. (2021), *Geneza solurilor*, Editura Universității din Oradea
- [2] Berchez O., Pereș A., Koteles N. (2018), *Metode de determinare a parametrilor fizico-chimici pentru apă, aer, sol*, Editura Universității din Oradea
- [3] Rusu T. etc. (2009), *Metode de cercetare ale solului și plantei*, Editura Risoprint Cluj-Napoca
- [4] Ștefănescu O.E., Ștefănescu M. (2019), *Chimie analitică instrumentală. Principii, aplicații, experimente*, Vol. II, Editura Politehnica Timișoara
- [5] Zăhan P., Bandici G. (1999), *Agrotehnica solurilor acide din nord-vestul României*, Editura Universității din Oradea

DETERMINAREA SPECTOFOTOMETRICĂ A Fe DIN SUCUL DE FRUCTE

Claudia-Alexandra POLENSZKI¹, Alexandrina FODOR², Anda-Ioana Grațîela PETREHELE², Claudia Mona MORGovan²

¹student licență Chimie anul III, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea

²profesori coordonatori Departamentul de Chimie, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea

Rezumat: În partea experimentală a acestei lucrări sunt prezentate determinări spectrofotometrice ale conținutului de fier din sucul unor fructe cum ar fi: capsunile, afinele, portocalele, bananele, ananasul și roșiile chery. Ca reactiv de culoare s-a utilizat tiocianatul de amoniu. Măsurătorile au fost efectuate la 490 nm. S-a utilizat curba de etalonare pentru determinarea cantitativă a Fe. S-a constatat faptul că cel mai mare conținut de fier îl au strugurii roșii (0,42 g/100 g), urmat de căpșuni (0,38 g/100 g) și ananas (0,31 g/100g). Cel mai mic conținut de fier îl au portocalele (0,12 g/100 g). Afinele, bananele și roșiile chery au un conținut de fier mai modest (0,22-0,29 g/100g). Prezentul studiu relevă faptul că fructele pot fi o importantă sursă de fier în dieta zilnică. Necesarul zilnic de fier pentru copii (cu vârsta mai mare de un an), variază între 8-11 mg, în funcție de vârstă. Astfel rezultă că pentru asigurarea cantității necesare de fier este suficient să se consume zilnic 100 g portocale sau cca 20 g struguri sau căpșuni, 50 g afine, banane sau roșii chery și respectiv 35 g ananas.

Cuvinte cheie: Analiza spectrofotometrică, tiocianat de amoniu, fier

INTRODUCERE

Fierul este indispensabil organismului uman, formând substanțe compuse cum ar fi hemoglobina și mioglobina, este cel mai utilizat metal în enzimele redox, care sunt implicate în respirația celulară, procesele de oxidare și reducere la organisme vegetale și animale, intră în organism prin aport alimentar și se pierde prin exfolierea continuă a celulelor tractului digestiv, urinar și a celulelor pielii. Acesta se stochează sub formă de feritină în celulele din splină, ficat și măduvă osoasă, iar o altă parte circulă în sânge legat de transferină (o proteină de transport specifică fierului).

O alimentație bogată în fier asigură o bună circulație sanguină, prevenind astfel bolile cardiovasculare. O cantitate insuficientă de fier în alimentația zilnică poate afecta modul în care organismul folosește energia. Fierul transportă oxigenul către mușchi și creier și este important atât pentru performanțele fizice, cât și mentale. În deficitul de fier, simptomele pot fi: oboseală cronică; amețală; cefalee; slăbiciune musculară; dificultăți de concentrare; afte bucale; unghii deformate; piele palidă; dificultăți în respirație; palpitații.

Cele mai importante roluri ale fierului în organism, atât pentru copii, cât și pentru adulți sunt: contribuția la formarea normală a globulelor roșii și a hemoglobinei, asigurând astfel transportul oxigenului în organism; contribuția la funcționarea normală a sistemului imunitar; contribuția la un metabolism energetic normal; este un nutrient cu rol esențial în dezvoltarea normală a funcției cognitive la copii; alimentația- cea mai bună metodă pentru a asigura necesarul zilnic de fier.

Sursele alimentare de fier sunt ficatul și organele animalelor, carnea slabă de vită, legumele verzi precum broccoli-ul, varza, spanacul fiert, fasolea verde, dar și leguminoasele precum fasolea boabe și linte sau tofu. Alte surse de fier sunt ciocolata neagră, stridiile și cerealele îmbogățite cu fier. O importantă sursă de Fe pentru dieta zilnică, mai ales a copiilor, o reprezintă fructele.

În partea experimentală a acestei lucrări sunt prezentate determinări spectrofotometrice ale conținutului de fier din sucul unor fructe cum ar fi: capsunile, afinele, portocalele, bananele, ananasul și roșiile chery. Ca reactiv de culoare s-a utilizat tiocianatul de amoniu. Măsurătorile au fost efectuate la 490 nm. S-a utilizat curba de etalonare pentru determinarea cantitativă a Fe.

FRUCTELE INVESTIGATE

Au fost luate în studiu sucul unor fructe cu conținut ridicat de Fe, cum ar fi: struguri, portocală, capsuni, afine, banană, ananas și roșii chery, care au fost achiziționate din supermarket în luna aprilie 2024.

MOD DE LUCRU

Prepararea sucului

Sucurile au fost colectate prin stoarcere și filtrate printr-o cârpă îngustă de bumbac.

Identificarea Fe

Pentru indicarea prezenței fierului în sucurile analizate se folosește ca reactiv de culoare tiocianat de amoniu, datorită apariției culorii roșii a ioniului complex $[\text{FeSCN}]^{2+}$.



Prepararea soluției standard de Fe^{+3} și a soluțiilor pentru trasarea curbei de etalonare

S-au cântărit aproximativ 3,0 g $\text{FeNH}_4(\text{SO}_4) \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$. Sarea a fost fin mojarată și 2,41 g din aceasta au fost cântărite cu precizie la balanța analitică și transferate într-un balon cotelat de 100 mL. S-a adăugat 20 mL acid sulfuric concentrat. Amestecul s-a păstrat minimum 12 ore în repaus. Soluția s-a transferat într-un balon de 500 mL și s-a adăugat treptat, sub continuă agitare apă bidistilată. Soluția se lasă în repaus pentru cca 3 zile până la dizolvarea completă a sării.

Utilizând o pipetă se transferă 20 mL soluție standard într-un balon cotelat de 200 mL și se aduce la semn cu apă bidistilată. Astfel s-a preparat o soluție de $0,001 \text{ M Fe}^{+3}$.

Se prepară soluții de Fe^{+3} de diferite concentrații pentru a trasa curba de calibrare.

Pentru a prepara o soluție $2 \times 10^{-5} \text{ M}$ se pipetează 10 mL soluție standard $0,001 \text{ M}$ într-un balon cotelat de 500 mL, se adaugă 10 mL soluție acid sulfuric $0,1 \text{ M}$ și se aduce la semn cu apă bidistilată. Se prepară în mod asemănător soluții cu concentrația de $4 \times 10^{-5} \text{ M}$, $6 \times 10^{-5} \text{ M}$, $8 \times 10^{-5} \text{ M}$ și respectiv $10 \times 10^{-5} \text{ M}$, pipetând câte 20, 30, 40 și respectiv 50 mL soluție standard $0,001 \text{ M}$ (conform tabelului).

Tabelul 1. Prepararea soluțiilor pentru curba de etalonare

Concentrație soluție Fe^{+3}	Volum (mL) soluție standard $0,001 \text{ M Fe}^{+3}$ diluată în balon cotelat 500 mL
0	0
$2 \times 10^{-5} \text{ M}$	10
$4 \times 10^{-5} \text{ M}$	20
$6 \times 10^{-5} \text{ M}$	30
$8 \times 10^{-5} \text{ M}$	40
$10 \times 10^{-5} \text{ M}$	50
$12 \times 10^{-5} \text{ M}$	60

Prepararea soluției de tiocianat de amoniu:

Se cântăresc 38 g tiocianat de amoniu și se dizolvă într-un balon cotelat de 500 mL.

Prepararea probelor de analizat

Se cântăresc aproximativ 2-5 g pulpă fruct de analizat și se calcinează direct în flacără într-un creuzet. Cenușa obținută se dizolvă în 10 mL HCL $0,1 \text{ N}$ sub agitare.



Trasarea curbei de etalonare

10 mL din fiecare soluție etalon Fe^{+3} (măsurată cât mai precis utilizând un cilindru gradat sau o pipetă) se introduc în pahare Berzelius. Se adaugă 10 mL soluție de tiocianat de amoniu având grijă

să facem adaosul la distanță în timp cât mai mică între ele. Se amestecă bine soluțiile. Se observă apariția colorației roșii. După 15 minute se măsoară absorbanta soluțiilor la 490 nm având grijă să se efectueze măsurătorile cât mai rapid. Intensitatea culorii depinde de concentrația de Fe^{+3} .

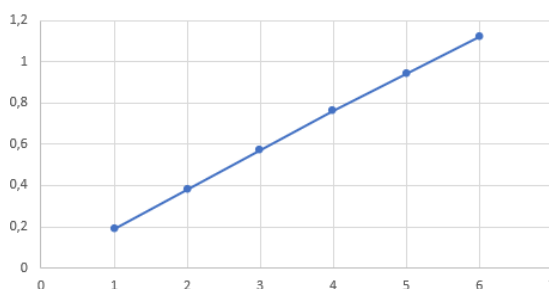


Figura 1. Curba de etalonare

Analiza spectrofotometrică

10 ml din fiecare soluție de analizat (măsurată cât mai precis utilizând un cilindru gradat sau o pipetă) se introduc în pahare Berzelius. Se adaugă 10 mL soluție de tiocianat de amoniu având grijă să facem adaosul la distanță în timp cât mai mică între ele. Se amestecă bine soluțiile. Se observă apariția colorației roșii. După 15 minute se măsoară absorbanta soluțiilor la 490 nm având grijă să se efectueze măsurătorile cât mai rapid.

Calcularea conținutului de Fe^{+3}

Pentru determinarea conținutului de Fe^{+3} se utilizează curba de etalonare, de masa de probă (fruct luată în analiză).

REZULTATE

Tabelul 2. Rezultate determinare Fe^{+3} în probele analizate

Probă	g Fe^{+3} /100g determinat experimental	g Fe^{+3} /100 g date din literatură https://fdc.nal.usda.gov/fdc-app.html#/food-details
Struguri roșii	0,42	0,36
Portocale	0,12	0,13
Căpșuni	0,38	0,41
Afine	0,25	0,28
Banană	0,22	0,26
Ananas	0,31	0,29
Roșii chery	0,29	0,27

După cum se poate observa cel mai mare conținut de fier îl au strugurii roșii (0,42 g/100 g), urmat de căpșuni (0,38 g/100 g) și ananas (0,31 g/100g). Cel mai mic conținut de fier îl au portocalele (0,12 g/100 g). Afinele, bananele și roșiile chery au un conținut de fier mai modest (0,22-0,29 g/100g)

CONCLUZII

Deoarece interesul populației cu privire la alimentația zilnică sănătoasă și echilibrată, crește pe an ce trece, crește și preocuparea cu privire la compoziția alimentelor pe care le consumăm. Copii reprezintă un important segment al populației. Dieta lor zilnică este foarte importantă pentru buna lor dezvoltare. De multe ori dieta zilnică a copiilor este restrânsă datorită preferințelor pe care

le manifestă. Unii copii au dificultăți în a consuma carnea și legumele. Fructele însă sunt prezente în preferințele majorității copiilor. Prezentul studiu relevă faptul că fructele pot fi o importantă sursă de fier în dieta zilnică. Necesarul zilnic de fier pentru copii (cu vârsta mai mare de un an), variază între 8-11 mg, în funcție de vârstă (<https://www.myfooddata.com/articles/fruits-and-vegetables-high-in-iron.php>).

Astfel rezultă că pentru asigurarea cantității necesare de fier este suficient să se consume zilnic 100 g portocale sau cca 20 g struguri sau căpșuni, 50 g afine, banane sau roșii chery și respectiv 35 g ananas.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Iron. *The Nutrition Source*, 16 Sept. 2019, www.hsph.harvard.edu/nutritionsource/iron/#:~:text=Iron%20is%20an%20important%20mineral,causing%20extreme%20fatigue%20and%20lightheadedness.. Accessed 03.04.2024.
- [2] Importanța fierului în organism. Curs de biochimie, Universitatea București, 2014, https://www.bio.unibuc.ro/pdf/licenta_2014/biochimie/Biochimie_clinica.pdf; Accessed 03.04.2024.
- [3] Importanța fierului în organism, *Ce să mâncăm*, 2021, <http://cesamancam.ro/fierul-rol-si-surse.html,%2008.12.2021>, Accessed 7.04.2024.
- [4] Rolul fierului în organism, Dr. Oana Cuzino, <https://doc.ro/sanatate/fierul-rolul-in-organism-deficit-exces-si-surse;> Accessed 03.04.2024.
- [5] Alimente bogate în fier, *Jorjette*, <https://jorjette.ro/fructe-alimente-bogate-in-fier/>, Accessed 03.04.2024.
- [6] Determination of iron, *Internatioanal Journal*, 6 June 2022, <https://ijcrt.org/papers/IJCRT22A6103.pdf>, Accessed 07.04.2024.
- [7] Iron Spectofotometric determination in spinach fresh leaves and spirulina powder, 2019, <https://journals.indexcopernicus.com/api/file/viewByFileId/1486913>, Accessed 03.04.2024.
- [8] Determination of iron in some organic product juice, *Department of Biotechnology and Microbiology*, 2018, https://www.iraj.in/journal/journal_file/journal_pdf/6-489-1539752869110-111.pdf, Accessed 08.04.2024.
- [9] Determination of trace metals and essential minerals in selected fruit juices in Minna, Nigeria, *International Journal Of Food Sience*, 2014, <https://www.hindawi.com/journals/ijfs/2014/462931/#abstract>, Accessed 08.04.2024.

ECO-INHIBITORI DE COROZIUNE DIN EXTRACTE NATURALE

Camelia Daniela IONAȘ (ȚICĂRAT)¹, Caius Marian STĂNĂȘEL³, Petru Gabriel BADEA²,
Alexandru BADEA², Andrei Daniel ȚICĂRAT², Sanda BOTA⁴

¹Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea

²Facultatea de Inginerie Managerială și Tehnologică, masterand CSA I, Universitatea din Oradea,

³Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea, studenți Chimie și Informatică,

⁴Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea, coordonator

Rezumat: *Eco-inhibitorii sunt substanțe prietenoase cu mediul, ce se obțin prin extracția lor prin diferite metode în solvenți alcoolici sau hidroalcoolici, cum ar fi macerarea sau extracția Soxhlet. Adăugați în cantități mici eco-inhibitorii scad sau anulează coroziunea metalelor în soluții apoase, prin formarea unui film ce se adsoarbe pe suprafața metalului.*

Cuvinte cheie: *extract alcoolic, oțel, inhibitori de coroziune*

INTRODUCERE

Coroziunea materialelor metalice reprezintă un fenomen destul de problematic în tehnologia modernă, având impact atât asupra siguranței și eficienței, cât și a costurilor de întreținere. Prin definiție, coroziunea este procesul de degradare a metalelor ca urmare a interacțiunii acestora cu mediul înconjurător. Procesul implică reacții redox la interfața metal/nemetal, cu transfer de electroni prin metal și transport de ioni prin soluție [1]

Există diferiți factori care influențează viteza de coroziune, dintre care: natura metalului, compoziția electrolitului, starea suprafeței, presiunea, temperatura și viteza de curgere a soluției. Pentru a asigura eficiența și siguranța instalațiilor, combaterea coroziunii este esențială și implică alegerea materialelor potrivite, tratamente termice, mecanice sau chimice, precum și utilizarea de acoperiri protectoare sau metode electrochimice de protecție.

Una dintre metodele de protecție cunoscute și utilizate o reprezintă tratamentul mediului coroziv cu inhibitori de coroziune [1-6].

Ramura chimiei care promovează practici durabile în industrie, incluzând utilizarea materiilor prime regenerabile și reducerea impactului asupra mediului, poartă denumirea de chimia verde. În acest sens, inhibitorii de coroziune verzi sau eco-inhibitorii sunt caracterizați prin lipsa compușilor toxici sau a metalelor grele și biodegradabilitate.

Așadar, eco-inhibitorii pot fi atât organici cât și anorganici, derivând din surse naturale sau biologice, cum ar fi plantele sau medicamentele [2-6]. Aceștia acționează prin formarea unei pelicule protectoare sau prin adsorbția la suprafața metalului, și sunt deseori clasificați ca inhibitori micști, având o eficiență semnificativă în prevenirea coroziunii.

Studiile recente au investigat eficacitatea diferitelor extracte naturale ca inhibitori de coroziune. De exemplu, extractele de coji de piersică, coajă de portocală, argan, frunze de mahon sau uleiuri esențiale de plante au demonstrat capacitatea de a proteja metalele împotriva coroziunii în medii acide [2-6]. Eficiența acestor extracte a fost evaluată prin diverse metode, cum ar fi analizele gravimetrice, electrochimice și de pierdere în masă.

Prepararea eco-inhibitorilor din plante - extracte hidroalcoolice:

Procesul de preparare implică pregătirea unei soluții hidroalcoolice, cu un raport de 1:1 între apă distilată și alcool etilic p.a. Pentru fiecare tip de extract, s-a cântărit o cantitate specifică de plantă uscată și s-a adăugat la soluția de apă-alcool. Tincturile au fost lăsate la macerat timp de 24 de ore la temperatura camerei, protejate de lumină pentru a preveni oxidarea.

După macerare, extractele au fost filtrate pentru a îndepărta materiile solide și au fost depozitate în recipiente de sticlă întunecată la rece, pentru a preveni degradarea sub influența radiațiilor solare.

Prepararea eco-inhibitorilor prin metoda Soxhlet

Metoda Soxhlet este o tehnică continuă de extracție utilizată pentru a obține substanțe solubile din materiale solide sau semisolid, folosind un solvent adecvat. Procesul implică introducerea materialului de extracție într-un extractor, plasat deasupra unui solvent într-un vas inferior. Prin încălzirea solventului, acesta se evaporă, trece prin materialul de extracție și se condensează, colectând substanțele solubile. Ciclul se repetă continuu până când substanțele dorite sunt complet extrase. Pentru prepararea eco-inhibitorilor, plantele uscate au fost introduse în extractorul Soxhlet, iar alcoolul etilic a fost utilizat ca solvent. Procesul de extracție a continuat timp de câteva ore, până când substanțele solubile au fost complet extrase.



Figura 1. Metode de preparare a extractelor de plante

Metoda gravimetrică

Metoda gravimetrică constă în calcularea vitezei de coroziune a unui metal sau aliaj. Determinările gravimetrice se fac în timp, experimentele putând dura de la câteva ore, la câteva luni în funcție de sistemul metal/mediu studiat [1].

Viteza de coroziune sau indicele gravimetric se calculează din raportul dintre variația masei probei metalice (Δm) și produsul dintre timpul (t) și suprafața probei (S) cu relația:

$$V_{\text{cor}} = \frac{\Delta m}{t S}, \text{ g/m}^2\text{h} \quad (1)$$

REZULTATE EXPERIMENTALE

Un inhibitor este o substanță chimică care este folosită pentru a reduce rata de coroziune a mediului coroziv prin adăugarea ei în cantități mici. Inhibitorii pot provoca o reacție anodică, o reacție catodică sau, ocazional, ambele. Deși sunt folosiți pentru a preveni coroziunea generală, mulți dintre acești inhibitori nu funcționează bine atunci când vine vorba de atacuri localizate, cum ar fi coroziunea în crevasă.

În figura 2 este prezentată dependența vitezei de coroziune (indicele gravimetric) de volumul de eco-inhibitor folosit, în intervalul de timp studiat de 1, respectiv 7 zile, în soluție apoasă de HCl 1N.

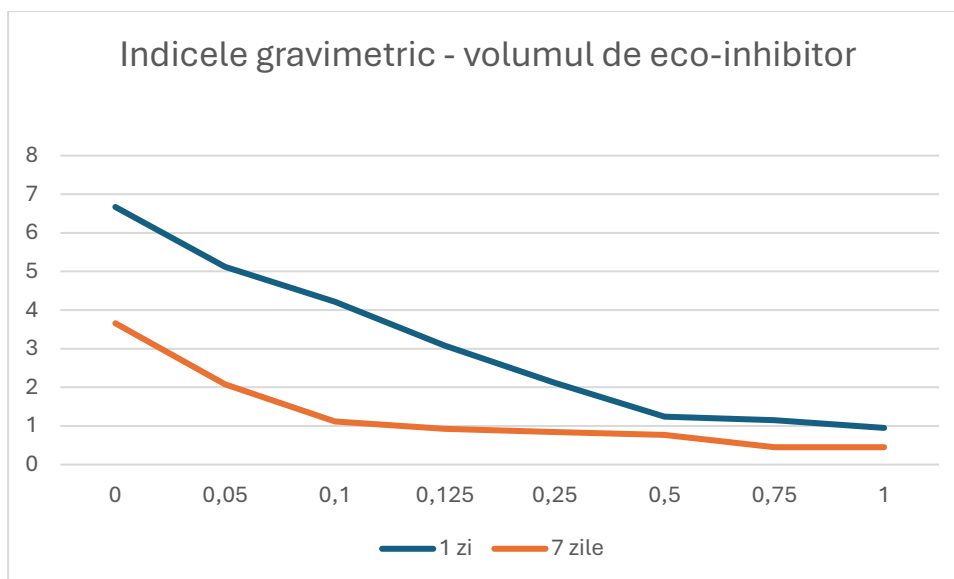


Figura 2. Variația indicelui gravimetric funcție de volumul de eco-inhibitor și timp.

CONCLUZII

Extractul de plante s-a dovedit promițător ca inhibitor de coroziune pentru sistemul metalic ales oțel carbon/soluție de HCl 1 N. Cu cât concentrația de eco-inhibitor a fost mai mare, a scăzut viteza de coroziune (indicele gravimetric), vitezele se înscriu în intervalul 2.1 - 10.5 g/m²h, însemnând faptul că metalul este oarecum rezistent la coroziune. Chiar și după 7 zile de la expunere, oțelul carbon, se înscrie în aceeași categorie, cu mențiunea că valorile sunt totuși mai mici. Se impun ca soluții: fie utilizarea unei concentrații mai mari de eco-inhibitor, fie expunere mai îndelungată, pentru a stabili dacă rezistența la coroziune crește în timp.

Aceste rezultate oferă o perspectivă promițătoare pentru dezvoltarea ulterioară a acestor eco-inhibitori și pentru aplicarea lor în industrie în vederea protejării materialelor metalice împotriva coroziunii într-un mod sustenabil și prietenos cu mediul.

BIBLIOGRAFIE

- [1]Rajni R. (2020), *Industrial applications of green chemistry: Status, Challenges and Prospects*, SN Applied Sciences, Vol. 2, pp.263 | <https://doi.org/10.1007/s42452-020-2019-6>
- [2]Bensouda Z., El Assiri E.H., Sfaira M. etc. (2019). *Extraction, Characterization and Anticorrosion Potential of an Essential Oil from Orange Zest as Eco-friendly Inhibitor for Mild Steel in Acidic Solution*. J Bio Tribo Corros, Vol. 5, pp.84 <https://doi.org/10.1007/s40735-019-0276-y>
- [3] El-Hashemy M.A., Sallam A. (2020), *The inhibitive action of Calendula officinalis flower heads extract for mild steel corrosion in 1 M HCl solution*, Journal of Materials Research and Technology, Vol. 9, No.6, pp. 13509-13523.
- [4]Ramezanzadeh M., Bahlakeh G., Sanaei Z, Ramezanzadeh B. (2018), *Studying the Urtica dioica leaves extract inhibition effect on the mild steel corrosion in 1 M HCl solution: Complementary experimental, ab initio quantum mechanics, Monte Carlo and molecular dynamics studies*, Journal of Molecular Liquids, Vol. 272, pp. 120-136.
- [5]Badea G. E., Dzitac S., Marin, L., Petrehele, A. I. G., Porumb, C., Badea, P.G. (2023), *An Investigation On The Electrochemical Behavior Of Steel In The Presence Of An Eco-inhibitor*. 17th International Conference on Engineering of Modern Electric Systems (EMES), Oradea, Romania, 1, doi: 10.1109/EMES58375.2023.10171763.
- [6] Badea G.E., Stănășel O. D., Bota S., Dzitac S., Ionaș C., Badea P.G., Stănășel C.M. (2022), *Database With Eco-Inhibitors Of Corrosion For Carbon Steel In Acid Environment*, Analele Universității Din Oradea - Fascicula Chimie, AUOFC Vol.XXVIII(29), pp.23-26

STUDIUL FIZICO-CHIMIC A UNOR ULEIURI PROTECTOARE PENTRU PIELE

Simu Mădălina¹, Sebeșan Horea-Radu², Sebeșan Mioara³

²Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe, Departamentul de Chimie, Str.Universitatii 1

¹Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe, Departamentul de Matematică și Informatică, Str.Universitatii 1, România

²profesor coordonator Departamentul de Chimie, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea

Rezumat: *Lucrarea prezintă rezultatele analizelor spectrofotometrice pentru determinarea vitaminelor E și A din uleiurile de cocos, măsline și struguri. Aceste uleiuri vegetale sunt folosite la îngrijirea pielii, oferind acesteia un pH-ul optim pentru o piele sănătoasă și ajută la îngrijirea și prevenirea leziunilor pielii. Uleiurile studiate sunt importante datorită numeroaselor principii active benefice care intră în componența lor. Pentru că pielea intră în contact cu diferite substanțe toxice, este foarte important să i se acorde o atenție specială.*

Keywords: *analiza spectrofotometrică UV-VIS, ulei de cocos, ulei de măsline, ulei de struguri*

INTRODUCERE

Uleiul mineral este cunoscut sub mai multe denumiri diferite. Motivul este probabil istoric, deoarece produsul a fost creat cu mult înainte de a fi implementat nomenclatorul comun.

Uleiurile vegetale fac parte din categoria cu cel mai mare conținut în vitamine liposolubile [1, 2], în principal vitaminele A și E.

Uleiul de măsline provine din fructele arborilor de *Olea Europaea L.* Constă în principal din acid oleic, cu cantități mai mici de alți acizi grași, cum ar fi acidul linoleic și acidul palmitic.

Uleiul de cocos este extras din miezul sau carnea nucilor de cocos - *Cocos nucifera A.* mature recoltate din palmierul de cocos. Nuca de cocos este compusă din mulți acizi grași liberi, inclusiv acid lauric (49%), acid miristic (18%), acid palmitic (8%), acid caprilic (8%), acid capric (7%), acid oleic (6%), linoleic. acid (2%) și acid stearic (2%). Uleiul de cocos s-a dovedit a fi la fel de eficient și sigur ca uleiul mineral atunci când este aplicat ca creme hidratante pentru xeroza ușoară până la moderată.

Uleiul din sămburi de struguri provine din semințele de *Vitis vinifera L.* Este bogat în compuși fenolici și vitamine. Cu toate acestea, aplicarea topică directă a uleiului de semințe de struguri pe pielea umană nu a fost încă bine investigată.

Vitamina A determină funcționarea optimă a sistemului vizual, transcripția genetică și diferențierea celulelor embrionare, imunitatea generală a organismului, producerea și dezvoltarea hematiilor, a sistemului osos și menținerea normală a densității masei osoase.

Vitamina A interacționează cu microelementele din sistemul circulator, în special cu zincul și fierul, zincul fiind implicat în mobilizarea rezervelor de retinol din ficat.

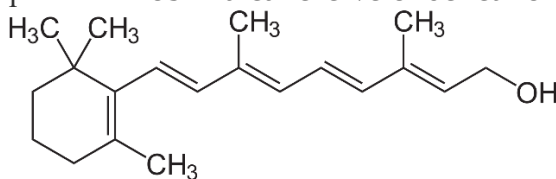


Figura 1. Structura chimică a retinolului

Vitamina E intervine în metabolismul creatininei din mușchi și în metabolismul hidraților de carbon, favorizând depunerea glicogenului în țesuturi. Lipsa vitaminei E din organism produce degenerări musculare și sterilitate la ambele sexe. Se recomandă în afecțiuni dermatice (psoriazis, acnee), în distrofii musculare, circulație periferică deficitară, etc.

Tocoferolul sau vitamina E se găsește în cantități semnificative în semințele de plante.

Structura chimică a tocoferolilor (figura 2) influențează direct asupra constantei de neutralizare a radicalilor liberi, α -tocoferolul având cel mai mare potențial antioxidant ($K = 4 \cdot 10^6 \text{ l} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{c}^{-1}$). Doza recomandată de încorporare în produsele alimentare constituie max. 300 mg/kg.

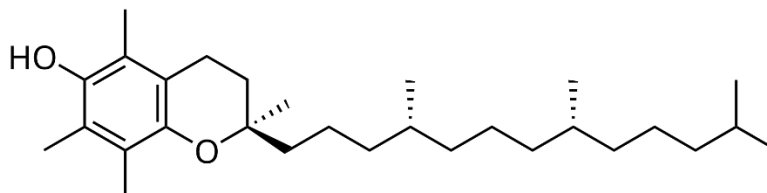


Figura 2. Structura chimică a α -tocoferolului

MATERIALE ȘI METODE

Dozarea vitaminei E (α -tocoferol) în uleiurile vegetale

Prima etapă în studiul cantitativ al vitaminei E prin metoda spectrometrică în UV-VIS a fost trasarea dreptei de calibrare a vitaminei E.

Prepararea soluțiilor pentru contsruirea dreptei de calibrare: 0,1g α -tocoferol-substanță standard (masă exactă) se dizolvă cu etanol absolut într-un balon cotat cu capacitatea 100 ml (soluția I).

În 5 baloane cotate cu capacitatea 10 ml se pipetează: 0,5 ml, 1 ml, 1,5 ml, 2 ml și 2,5 ml soluție I.

Apoi, se adaugă în fiecare balon cotat câte 0,25 ml soluție de 2,2– dipiridil 0,25% și 0,25 mL soluție de clorură de fer (III) 0,25%. Se agită și se aduce la cotă cu etanol absolut.

După măsurarea absorbanțelor celor 5 soluții de calibrare la 520 nm, în cuve de 1 cm, față de soluția martor: etanol absolut, după care s-a trasat dreapta de calibrare a α -tocoferolului.

Tabel 1. Valorile absorbanțelor celor 5 soluții de calibrare la 520 nm.

Probe	Soluția 1	Soluția 2	Soluția 3	Soluția 4	Soluția 5
Valoarea absorbantei Determinate la 520 nm	0,1208	0,1879	0,2507	0,3107	0,3676
Concentrația Vitaminei E ($\mu\text{g/ml}$)	50	100	150	200	250

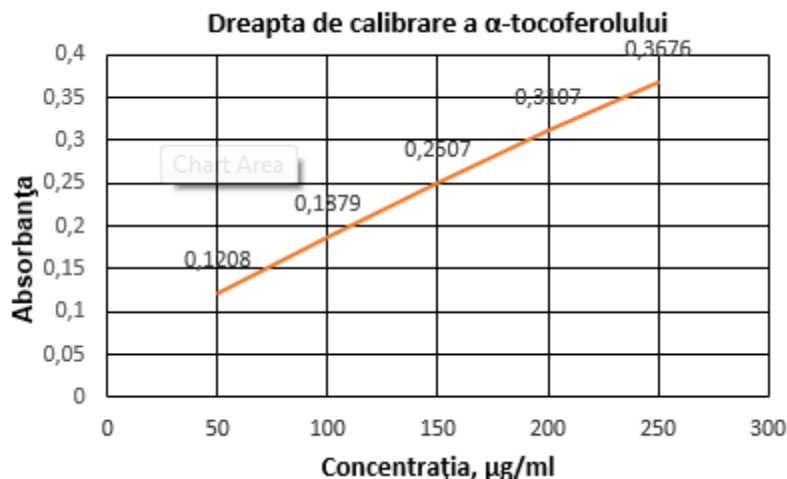


Figura 3. Dreapta de calibrare a α -tocoferolului.

Prepararea probelor de uleiuri vegetale

Pentru fiecare dintre uleiurile vegetale menționate, la 0,1 ml ulei vegetal se adaugă 0,25 mL 2,2-dipiridil 0,25% și 0,25 ml soluție de clorură de fier (III) 0,25%. Se agită și se completează până la 10 ml cu etanol absolut.

S-au măsurat absorbantele celor 3 soluții de probe din uleiurile vegetale de cocos, struguri și măslina la 520 nm, în cuve de 1 cm, față de soluția martor: etanol absolut.

Tehnica dozării vitaminei A din uleiuri vegetale constă în luarea a 0,1g probă de ulei vegetal, care se completează la volum cu etanol absolut, în eprubeta gradată la 20 ml. Se citește absorbanta soluțiilor obținute la 325 nm, în cuve cu grosimea de 1 cm. Conținutului de vitamina A în uleiurile analizate se determină după formula: $UI/g = (A \times 100 \times 1900) / (g \times 0,4)$, unde:

A – absorbanta soluției la 325 nm;

g – cantitatea de soluție luată în lucru;

1900 – coeficientul de transformare în UI (unități internaționale).

REZULTATE ȘI DISCUȚII

Absorbantele celor 3 soluții de probe din uleiurile vegetale de cocos, struguri și măslina la 520 nm, în cuve de 1 cm, față de soluția martor:

A \ nm	520 nm
No. of cycle: 1	0.3811

Figura 4. Absorbanta pentru uleiul de cocos

A \ nm	520 nm
No. of cycle: 1	0.2135

Figura 5. Absorbanta pentru uleiul de struguri

A \ nm	520 nm
No. of cycle: 1	0.1206

Figura 6. Absorbanta pentru uleiul de măslina

Cu ajutorul funcției drepte de calibrare s-a determinat concentrația în mg/ mL a vitaminei E din uleiurile vegetale analizate. Rezultatele obținute sunt redate în tabelul 3.2 și figura 3.13.

Tabel 2. Valorile absorbanțelor celor 3 uleiuri vegetale la 520 nm.

Probe	Ulei de cocos	Ulei de struguri	Ulei de măsline
Valoarea absorbanței Determinate la 520 nm	0,3811	0,2135	0,1206
Concentrația Vitaminei E (μg/ml)	266	118	49

Din datele obținute se observă că cea mai mare concentrație de vitamina E a prezentat-o uleiul de cocos. În figura 7 este prezentat nivelul concentrației de vitamina E din uleiurile vegetale.

Analiza a fost efectuată cu un spectrofotometru SPECORD PLUS 210, în cuve de cuarț de 1 cm. O probă de ulei vegetal de 0,1 ml a fost diluată în prealabil de 1:10 și introdusă în cuva spectrofotometrului, absorbantele fiind citite la 520 nm.

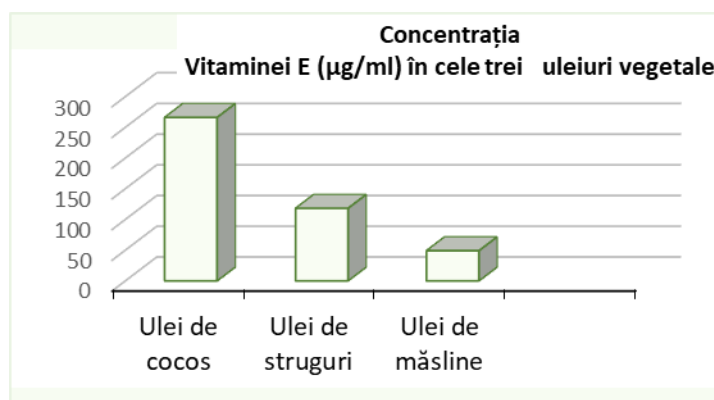


Figura 7. Nivelul concentrației de vitamina E din uleiurile vegetale.

Dozarea vitaminei A din uleiurile vegetale

S-au măsurat absorbantele probelor din cele 3 uleiuri vegetale, ulei de cocos, ulei de struguri, ulei de măsline la 325 nm, în cuve de 1 cm, față de soluția martor: etanol absolut.

A \ nm	325 nm
No. of cycle: 1	0.0429

Figura 8. Absorbanța pentru uleiul de cocos

A \ nm	325 nm
No. of cycle: 1	0.1515

Figura 9. Absorbanța pentru uleiul de struguri

A \ nm	325 nm
No. of cycle: 1	0.1718

Figura 10. Absorbanța pentru uleiul de măsline

Cu ajutorul formulei: $UI/g = (A \cdot 100 \cdot 1900)/(g \cdot 0.4)$

A – absorbanta soluției la 325 nm; g – cantitatea de soluție luată în lucru;
1900 – coeficientul de transformare în UI (unități internaționale), s-a determinat concentrația în mg/ mL a vitaminei A din uleiurile vegetale analizate. Rezultatele obținute sunt redate în tabelul 3. și figura 11.

Tabel 3. Valorile absorbanțelor celor 3 uleiuri vegetale la 325 nm.

Probe	Ulei de cocos	Ulei de struguri	Ulei de măsline
Valoarea absorbanței Determinate la 325 nm	0,0429	0,1515	0,1718
Concentrația Vitaminei A (UI/g)	23797	76151	92315

În figura 11. este prezentat nivelul concentrației de vitamina A din uleiurile vegetale.

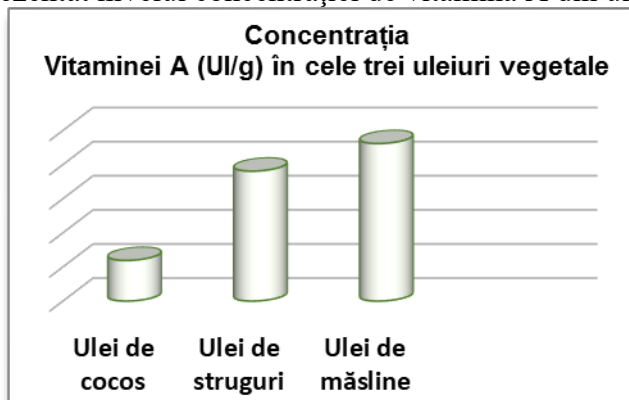


Figura 11. Nivelul concentrației vitaminei A din uleiurile vegetale.

Din datele obținute se observă că cea mai mare concentrație de vitamina A a prezentat-o uleiul de măsline.

CONCLUZII

Din varietatea de metode de determinare a acestor componente în uleiurile vegetale a fost selectată metoda spectrofotometrică UV-VIS, fiind una simplă, exactă și accesibilă. Prima etapă în studiul cantitativ al vitaminei E prin metoda spectrometrică în UV-VIS a fost trasarea dreptei de calibrare a vitaminei E. Cu ajutorul funcției dreptei de calibrare s-a determinat concentrația în mg/mL a vitaminei E din uleiurile vegetale analizate.

În urma determinării cantitative prin metoda spectrofotometrică UV-VIS a conținutului de vitamina E și A în uleiurile vegetale analizate, o concentrație mai mare de vitamina E a fost regăsită în uleiul de cocos 266 μg/ml și o concentrație mai mare de vitamina A a fost regăsită în uleiul de măsline.

BIBLIOGRAFIE

- [1]. Neamțu G. (2001), *Substanțe naturale biologice active, vol.I, Vitamine*, Ed. R.A. București.
- [2]. Ross A.C., Stephensen C.B.(1996), *Vitamin A and retinoids in antiviral responses*. The FASEB Journal Vol. 10, No.9, pp. 979-985.
- [3]. Chiriac V, Balea G, Chiriac V. (1995), *Analiza chimică calitativă*. Ed. Mirton Timișoara.
- [4]. Purcărea Cornelia, (2015), *Îndrumător de laborator -Biochimie*, Editura Universității Oradea, Oradea.
- [5]. D.Hădărugă, N.Hădărugă, (2002), *Compuși odoranți și aromatizanți*, Editura Politehnica Timișoara, Timișoara.

- [6]. Nașcu H., Jăntschi L. Hodișan T., Cimpoiu C., Câmpan G.(1999), *Some Applications of Statistics in Analytical Chemistry*, Review Anal. Chem., pp. 47.
- [7]. Mageed, M.A.A.E., Mansour, A.F., Massry, K.F.E., Ramadan, M.M., Shaheen, M.S.(2011). *J. Essent. Oil-Bearing Plants*, Vol. 14, pp.214–223.
- [8]. Firooz A, Aghazadeh N, Rajabi Estarabadi A, Hejazi P. (2015), *The effects of water exposure on biophysical properties of normal skin*. *Skin Res Technol*, Vol. 21, pp. 131–136.
- [9]. Safta M. (2002), *Super-Antioxidanți naturali în alimentație și medicină*, Secretul sănătății și longevității, Ed. Sudura, Timișoara.

JUSTIFICAREA REPLANIFICĂRII TRATAMENTULUI ÎN MANAGEMENTUL TUMORILOR DIN SFERA ORL

Noemia-Daniela BUCUR¹, Loredana MARCU²

¹Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe, student anul III Fizică Medicală, Oradea, România

²Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe, Departamentul de Fizică

Rezumat: *Lucrarea cuprinde importanța replanificării tratamentului în radioterapia pentru cancerul ORL, oferind un studiu de caz clinic pentru a ilustra acest proces. Se discută metodele și materialele folosite pentru monitorizarea pacientului, conturarea organelor la risc (OAR) pentru a minimiza expunerea structurilor sensibile, și necesitatea ajustării planului de tratament pentru a compensa modificările anatomice care apar în timpul terapiei.*

Cuvinte cheie: *radiații ionizante, radioterapie, 3D-CRT, replanificare, ORL, CT-SIM*

INTRODUCERE

Cancerul din sfera ORL (otorinolaringologie), reprezintă o problemă majoră de sănătate, fiind cel de-al 7-lea cancer ca incidență, cu un număr aproximativ de 600.000 de cazuri noi și al 8-lea privind decesele, implicând o varietate de tumori, la nivelul capului și gâtului. Managementul acestor tumori este complex și necesită o abordare multidisciplinară, care poate include chirurgia, radioterapia, chimioterapia sau o combinație între cele 3 abordări și alte terapii adjuvante. În acest context, replanificarea tratamentului devine o componentă critică a strategiei de îngrijire a pacientului, având scopul de a adapta și ajusta planul terapeutic în funcție de evoluția bolii și de schimbările anatomice sau clinice survenite pe perioada tratamentului.

Progresele tehnologice din domeniul radioterapiei, cum ar fi introducerea tehnicii de planificare conformațională tridimensională (3D-CRT), radioterapia cu modulare a intensității (IMRT) și terapia cu arc modulată volumetric (VMAT), au facilitat o mai bună conformare a dozei de radiație la forma și dimensiunile tumorii, minimizând în același timp doza la țesuturile sănătoase din vecinătate.

În această lucrare, vom explora motivele și beneficiile replanificării tratamentului în managementul tumorilor din sfera ORL, examinând aspecte precum impactul progresului tumoral asupra planului terapeutic, metodele și tehnologiile disponibile pentru replanificare și implicarea unei echipe multidisciplinare în luarea deciziilor. De asemenea, vom analiza provocările și dificultățile asociate replanificării tratamentului și strategiile pentru gestionarea acestora, în scopul de a evidenția importanța și necesitatea acestei practici în asigurarea unei îngrijiri optime a pacienților cu cancer din regiunea ORL.

METODE ȘI MATERIALE

În cadrul acestei lucrări am avut în vedere realizarea unui studiu retrospectiv asupra justificării replanificării tratamentului în managementul tumorilor din sfera ORL sub utilizarea celor mai optime tehnici de tratament în cadrul radioterapiei, anume 3D-CRT, IMRT și VMAT, cu focalizare asupra 3D-CRT-ului, în cazul unui pacient de sex masculin, înaintat în vârstă. Acesta s-a prezentat la Spitalul Clinic Municipal „Dr.Gavril Curteanu”, relatând prezența unei umflături situate în zona ORL. În urma diagnosticării volumului tumoral de către medicul oncolog, s-au întocmit cinci planuri de tratament care presupun iradierea zonei cervicale, cu protejarea în același timp a organelor la risc, urmând ca pe parcursul fiecărui plan realizat să intervină o serie modificări anatomice suferite de către pacient, rezultând replanificarea fiecărui plan în parte.

În urma diagnosticului pus, pacientul este supus unui CT-SIM cu ajutorul căruia va avea loc scanarea părții corpului care urmează să fie tratată, obținându-se o reconstruire 3D a volumului de tratament, marcând totodată și izocentrul acestuia. Poziția pacientului din cadrul CT-SIM-ului, va fi ulterior poziția în care i se va livra tratamentul.

După obținerea imaginilor, medicul oncolog se ocupă de conturarea organelor la risc și a volumelor țintă, urmând ca fizicianul medical să realizeze planul de tratament cu doza prescrisă de

către medicul în cauză. Planul va fi reanalizat pentru aprobare, ca în final pacientul să beneficieze de livrarea dozei prescrise.

Conturarea organelor la risc (OAR)

În urma simulării CT, medicul oncolog se ocupă de conturarea volumului tumoral, cât și a organelor la risc. Pentru o delimitare cât mai precisă a volumului țintă, respectiv a organelor din imediata vecinătate a dozelor de radiație este utilizat sistemul de planificare Monaco (TPS - treatment planning system) aferent acceleratorului Elekta, a cărui software realizează și calculul dozelor pentru planul de tratament (figura 1).

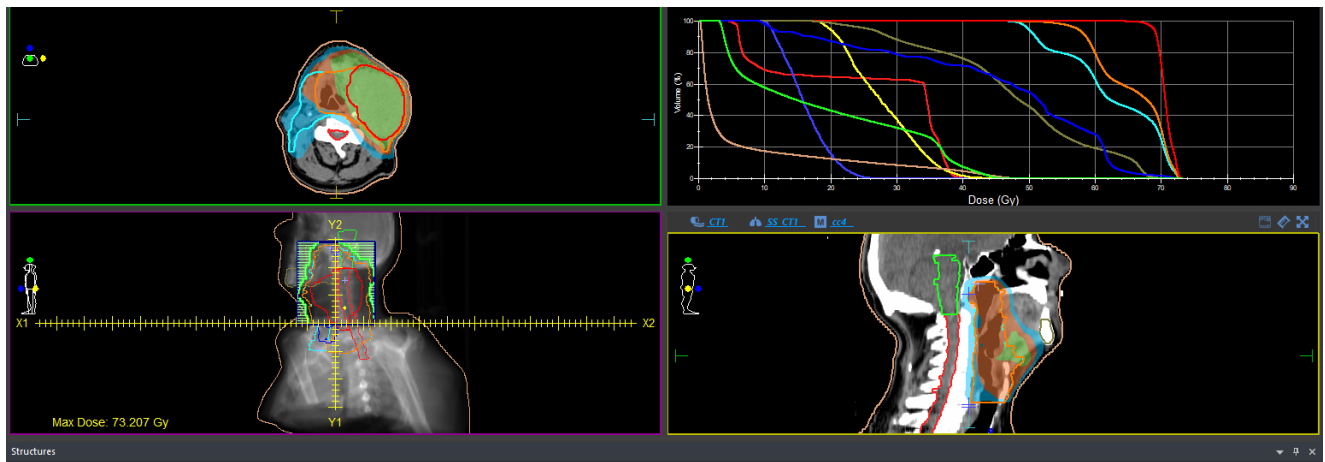


Figura 1. Conturarea volumului țintă și a organelor la risc, imagine obținută din sistemul de planificare Monaco (TPS - treatment planning system)

Planificarea și replanificarea tratamentului

Pacientul a fost planificat și tratat cu sistemul de planificare și tratament Monaco, asociat acceleratorului Elekta, imobilizat cu o mască termoplastică personalizată pentru cap și umeri fixată în mai multe puncte de masa acceleratorului.

În urma scanării CT și transmiterii datelor în software-ul computerului sunt definite cele trei CTV-uri alături de o marjă de eroare de câțiva milimetri pentru prevenția unei posibile recidive. Planurile de tratament au fost optimizate pentru a se asigura că 95% din CTV a primit 100% din doza prescrisă. Astfel CTV 50 trebuie să primească cel puțin 47,5 Gy de radiație, CTV 60 cel puțin 57 Gy de radiație, respectiv CTV 70 primește o doză de 66,5 Gy. Dozele totale asupra tumorii primare au variat între 50 și 70 Gy. De amintit faptul că pacientul imediat după simulare CT a avut de așteptat două săptămâni până la primirea tratamentului, rezultând o creștere a volumului tumoral în ziua tratamentului față de scanarea inițială, solicitându-se resimularea.

Asupra acestui caz s-a ales abordarea tehnicii 3D-CRT, contribuind cu modelarea precisă a geometriei câmpului de iradiere pentru a maximiza doza la volumul tumoral țintă (CTV), și a minimiza expunerea organelor la risc (OAR).

Livrarea tratamentului convențional

Pentru livrarea radioterapiei, s-au respectat următorii pași:

- poziționarea pacientului pe masa de tratament utilizând dispozitivele de imobilizare și verificarea poziției corecte prin imagini suplimentare (ex. imagistică portală sau CBCT);
- livrarea radiației conform planului, utilizând aparatura de radioterapie (accelerator liniar);
- monitorizarea constantă a pacientului și a echipamentului în timpul fiecărei sesiuni de tratament.

Procesul începe cu stabilirea volumului tumoral care se dorește a fi iradiat, urmată de

determinarea câmpurilor de iradiere, conform protocoalelor instituționale. În tratamentul cancerului din zona ORL, acoperirea adecvată a tumorii necesită de obicei utilizarea unui număr mare de câmpuri de iradiere. De obicei, se folosesc opt câmpuri, dar numărul poate crește până la șaisprezece, în funcție de protocolul specific al instituției. Configurarea câmpurilor de iradiere implică obținerea unor câmpuri mari și efectuarea calculelor necesare, utilizând tehnici precum "field-in-field", (câmp în câmp), pentru a obține o distribuție a izodozei precisă (cu un nivel de referință de 110%).

Calcularea dozei de iradiere pentru volumul tumoral țintă (CTV) este esențială, având ca obiectiv administrarea unei doze terapeutice cuprinse între 95% și 107% din doza prescrisă. Această precizie este crucială pentru maximizarea eficienței tratamentului și minimizarea efectelor secundare. Protecția organelor la risc (OAR), este o componentă esențială a planificării radioterapiei. Fiecare organ la risc are constrângeri de doză specifice pentru a preveni toxicitatea și a menține funcționalitatea normală a acestor structuri critice.

S-a întocmit o schemă de tratament compusă din cinci planuri de tratament, respectiv patru resimulări succesive datorită schimbărilor în structurile anatomice, care includ scăderea sau stagnarea volumului tumoral, pierderea în greutate a pacientului, observate pe parcursul tratamentului. Fiecare plan de tratament a inclus trei volume țintă clinice (CTV-uri): CTV50 cu 47,5 Gy, CTV60 cu 57 Gy și CTV70 cu 66,5 Gy.

Primul plan nu a fost administrat, tumora continuând să crească, necesitând o primă resimulare. Al doilea plan, corespunzător primei resimulări, s-au administrat 16 Gy. În cadrul celei de-a doua resimulări, al treilea plan, s-a observat o reducere semnificativă a volumului tumoral și tratamentul a continuat cu 12 Gy. A treia resimulare, reprezentată de al patrulea plan, a arătat din nou o reducere a volumului tumoral, iar pacientul a fost tratat cu 16 Gy. A patra resimulare, corespunzătoare celui de-al cincilea plan, a indicat o continuă reducere a volumului tumoral, tratamentul fiind finalizat cu 6 Gy.

Resimulările au fost efectuate după un număr variabil de fracțiuni: 8 fracțiuni pentru prima resimulare, 6 fracțiuni pentru a doua resimulare, 8 fracțiuni pentru a treia resimulare și 13 fracțiuni pentru a patra resimulare. Aceste 13 fracțiuni au inclus distribuția dozelor după cum urmează: 3 fracțiuni pentru CTV50, 5 fracțiuni pentru CTV60 și 5 fracțiuni pentru CTV70. În total, tratamentul a constat din 35 de fracțiuni, cumulând o doză totală de 70 Gy.

În urma revizuirii celor cinci planuri de tratament, comparând CT-urile rezultate în decursul celor patru replanificări, se poate constata răspunsul pozitiv, și totodată cel dorit de către echipa de radioterapie, al tumorii la tratament. Având dimensiunea de 2.74cm la începutul tratamentului, volumul acesteia se reduce cu 2.35cm pe parcursul tratamentului, la finalul sesiunilor de radioterapie rămânând cu o masă de țesut ușor ne semnificativ de 0.39cm.

Această abordare complexă și adaptativă a permis gestionarea dinamică a tratamentului, ținând cont de modificările în structurile anatomice ale pacientului și asigurând livrarea precisă și eficientă a dozei terapeutice necesare pentru controlul tumoral.

Secțiunile următoare prezintă, în mod detaliat, planurile sus-menționate, cu imaginile aferente preluate din sistemul de planificare, respectiv histogramele doză-volum indicative ale dozelor la CTV respectiv OAR.

După cum s-a menționat anterior, primul plan nu a fost administrat, deoarece tumora a crescut, prin urmare a fost nevoie de o primă replanificare (figura 2, tabelul 1).

REZULTATE ȘI DISCUȚII

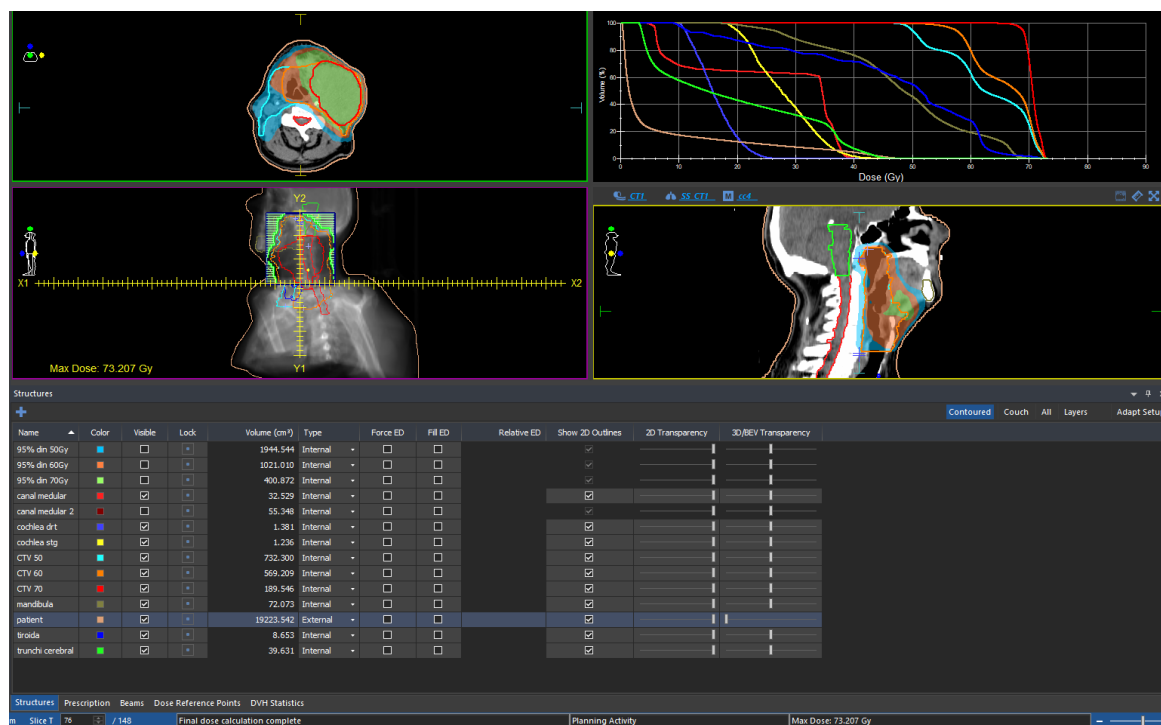


Figura 2 Plan 1, Imagine obținută din sistemul de planificare Monaco

Tabelul 1. Plan 1/CTV

Structură	Primul plan		
	CTV50	CTV60	CTV70
Volum (cm^3)	732.300	-	-
Min. Dose (Gy)	-	-	-
Max. Dose (Gy)	-	-	-
Mean Dose (Gy)	-	-	-

Al cincilea plan indică reducerea continuă a volumului tumoral, care a fost tratat cu 50Gy/3 fracțiuni, 60Gy/5 fracțiuni, 70Gy/5 fracțiuni, conform definiției CTV-urilor prezentate mai sus (figurile 3-4, tabelul 2).

Analizând comparativ cele cinci planuri de tratament pentru structurile CTV 50, CTV 60 și CTV 70, sunt evidențiate diferențe semnificative atât în volum cât și în distribuția dozei. Volumul CTV 50 variază considerabil, având cel mai mare volum de 827.094 cm^3 în cel de-al doilea plan, iar cel mai mic volum de 639.200 cm^3 în al cincilea plan, indicându-se diferențe în extinderea țesutului tumoral țintă. Doza minimă pentru CTV 50 variază între 5.365 Gy (al doilea plan) și 10.566 Gy (al patrulea plan), iar doza maximă variază între 12.817 Gy (al treilea plan) și 27.064 Gy (al cincilea plan). Doza medie pentru CTV 50 este cea mai mică în al treilea plan (11.978 Gy) și cea mai mare în al cincilea plan (18.945 Gy), sugerând strategii diferite de administrare a dozei. În al treilea plan, CTV 50 prezintă un volum foarte apropiat de cel din primul plan, sugerând consistența dintre cele două planuri. În al cincilea plan, pentru CTV 60 și CTV 70 dozele sunt semnificativ crescute, dozele minime cuprinse între 11.00 Gy și 21.060 Gy, iar dozele medii cuprinse între 21.000 Gy și 25.746 Gy, evidențiindu-se o intensificarea tratamentului asupra volumelor mai mici.

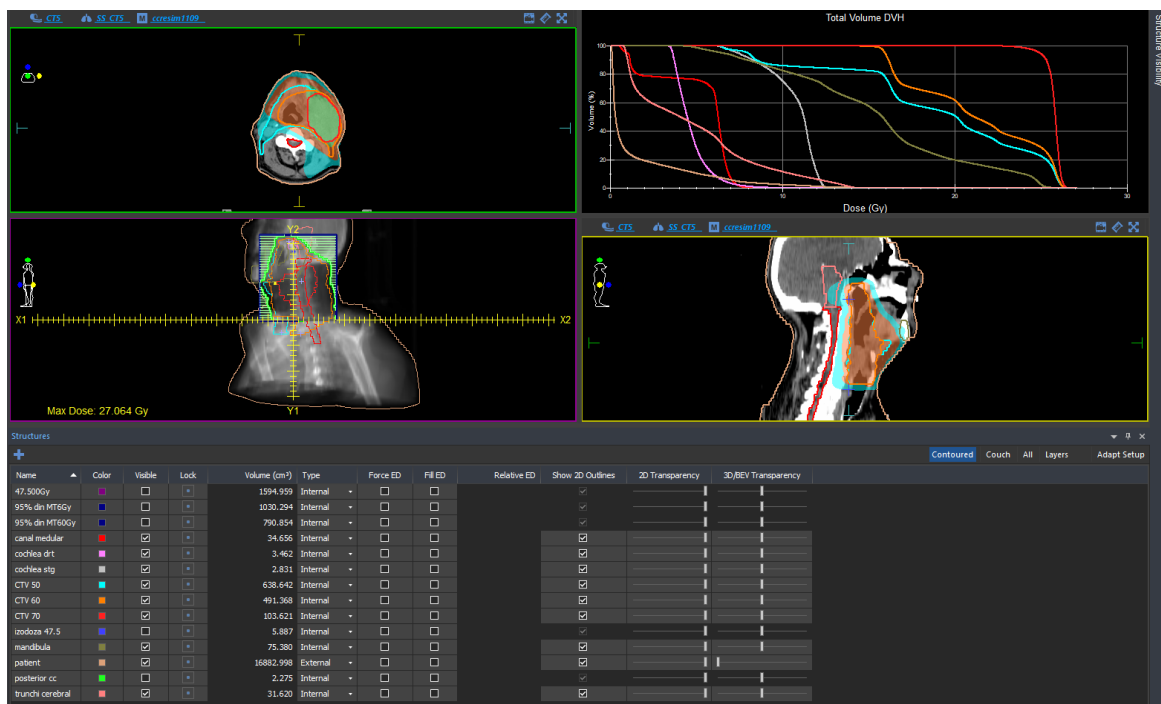


Figura 3. Plan 5, Imagine obținută din sistemul de planificare Monaco

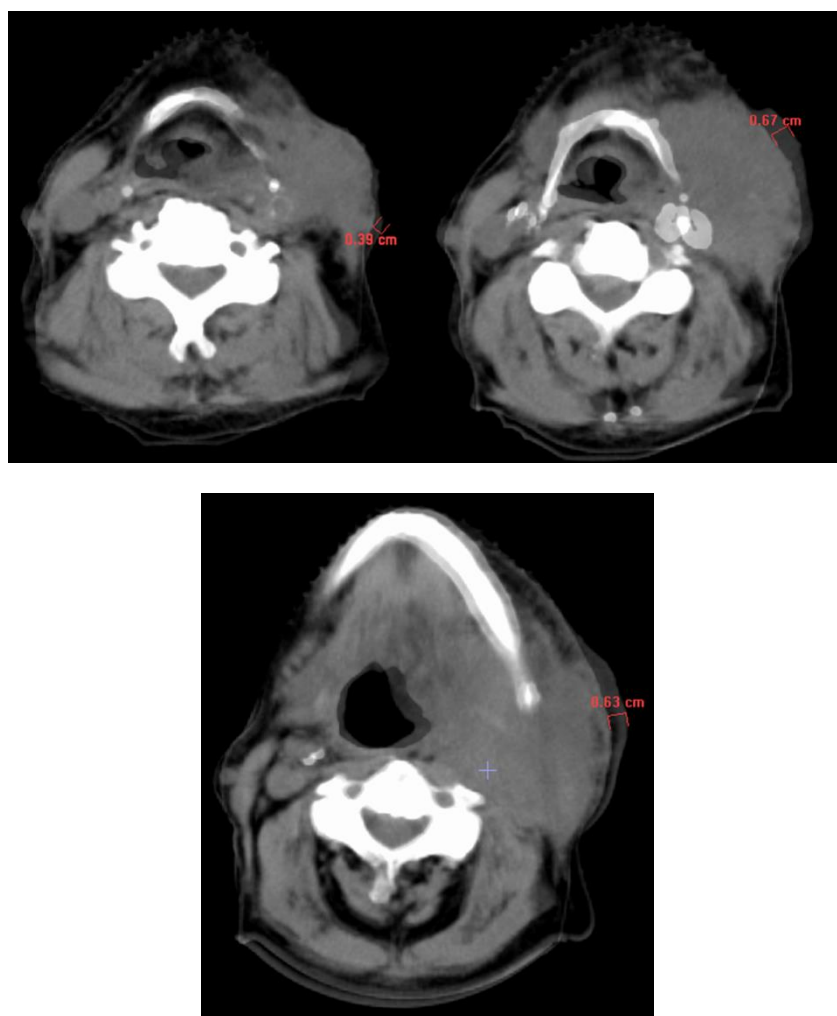


Figura 4. Plan 5/Volumurile tumorale conturate în ultima ședință de tratament, a cincea scanare CT reprezentată în prima imagine, respectiv evoluția finală a volumului tumoral la finalul tratamentului după finalizarea a 13 ședințe de radioterapie.

Tabelul 2. Plan 5/CTV

Structură	Al cincilea plan		
	CTV50	CTV60	CTV70
Volum (cm^3)	639.200	492.285	103.695
Min. Dose (Gy)	5.822	11.009	21.060
Max. Dose (Gy)	27.064	27.064	26.730
Mean Dose (Gy)	18.945	21.144	25.746

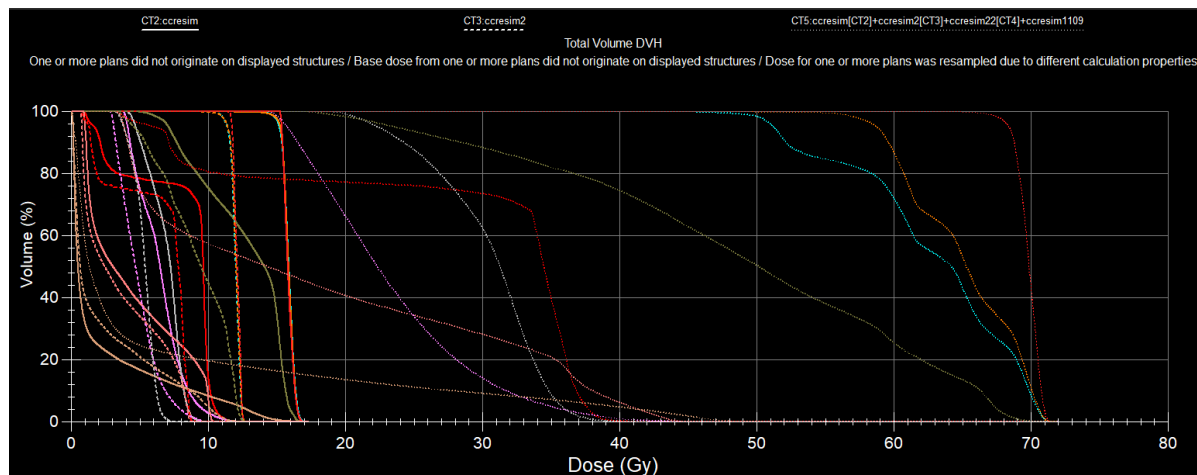


Figura 5. Grafic reprezentativ a volumului total DVH, Imagine obținută din sistemul de planificare Monaco

Graficul DVH (Histogramă a Volumului în Funcție de Doză) (figura 1.5.), afișează distribuția dozelor de iradiere în funcție de volumele țintă și organele la risc pe parcursul diferitelor resimulări ale tratamentului. Graficul include datele tuturor planurilor realizate pe toată durata tratamentului și însumează rezultatele dozelor administrate.

Tabelul 3. Suma totală a DVH-urilor

Resimulare/Plan	Doză (Gy)	Explicație
Prima resimulare	16	Tratament inițial după creșterea tumorii
A doua resimulare	12	Reducerea volumului tumoral
A treia resimulare	16	Continuarea reducerii volumului tumoral
A patra resimulare	6	Continuarea reducerii volumului tumoral
CTV50 (3 fracțiuni)	11.54	50 Gy distribuit pe 13 fracțiuni, aplicat pentru 3 fracțiuni (50/13*3)
CTV60 (5 fracțiuni)	23.08	60 Gy distribuit pe 13 fracțiuni, aplicat pentru 5 fracțiuni (60/13*5)
CTV70 (5 fracțiuni)	26.92	70 Gy distribuit pe 13 fracțiuni, aplicat pentru 5 fracțiuni (70/13*5)
Suma totală	111.54	Suma totală a dozelor administrate pe parcursul întregului tratament

Tabelul 3 însumează parcursul tratamentului pacientului, prin tehnica 3D-CRT, incluzând resimulările și fracțiunile de doză finale. Prima resimulare a fost necesară după creșterea inițială a tumorii, administrându-se 16 Gy, volumul țintă scăzând 0.05cm. A doua resimulare a condus la administrarea a 12 Gy, observându-se o reducere a dimensiunii tumorii cu 0.13cm. A treia resimulare a continuat reducerea volumului tumoral de până la 0.07cm după o doză de 16 Gy. În urma celei de-a patra resimulări, s-a continuat tratamentul cu 6 Gy, continuând reducerea dimensiunii tumorii cu 0.28cm.

Dozele pentru fracțiunile finale au fost calculate astfel:

- **CTV50:** 50 Gy distribuiți pe 13 fracțiuni, cu 3 fracțiuni administrate (echivalentul a 11.54 Gy).
- **CTV60:** 60 Gy distribuiți pe 13 fracțiuni, cu 5 fracțiuni administrate (echivalentul a 23.08 Gy).
- **CTV70:** 70 Gy distribuiți pe 13 fracțiuni, cu 5 fracțiuni administrate (echivalentul a 26.92 Gy).

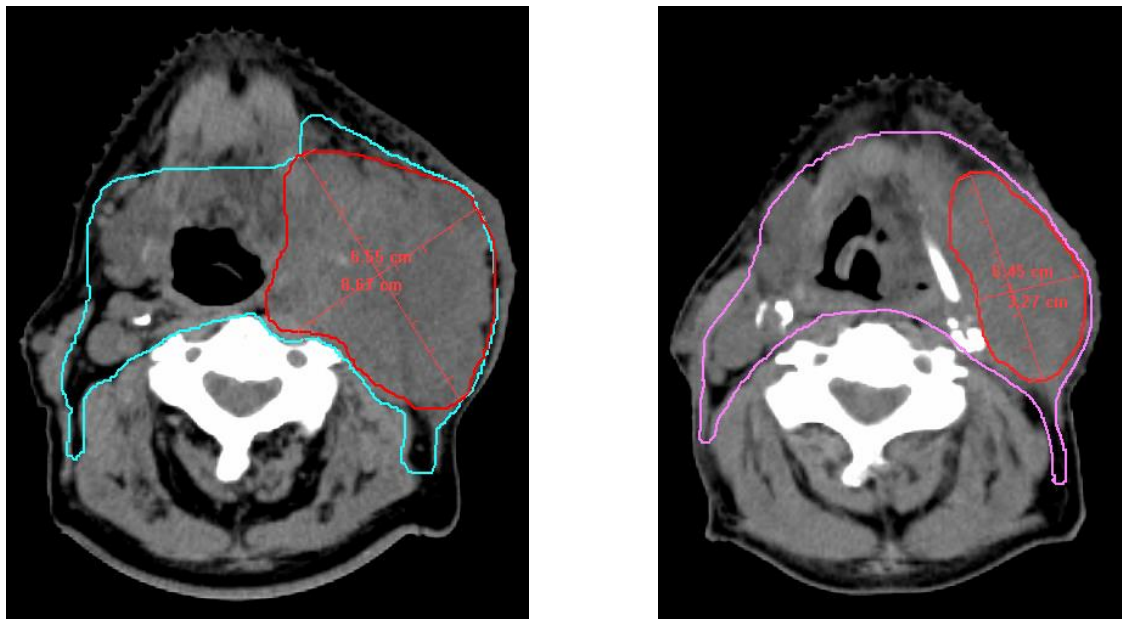
Astfel, suma totală a dozelor administrate pe parcursul tratamentului este de 111.54 Gy.

Tabelul 4. Modificarea volumului tumoral pe durata întregului tratament

Plan de tratament	CTV50 (cm ³)	Doza încasată de CTV50	CTV60 (cm ³)	Doza încasată de CTV60	CTV70 (cm ³)	Doza încasată de CTV70	Volum total final (cm ³)
Plan 1	732.300	95% din 50Gy (47.5Gy)	569.209	95% din 60Gy (57Gy)	189.546	95% din 70Gy (66.5Gy)	1491.055
Plan 2	827.094	93% din 50Gy (46.5Gy) 95% din 50Gy (47.5Gy)	-	-	-	-	827.094
Plan 3	733.914	95% din 34Gy (32.2Gy)	-	-	-	-	733.914
Plan 4	676.105	95% din MT	-	-	-	-	676.105
Plan 5	639.200	47.500Gy	-	-	-	-	1235.180

CTV: Volumul Țintă Clinic; MT: Doză totală administrată pe parcursul întregului tratament (Mențiune specifică pentru cazurile în care nu se specifică o doză exactă); Doza încasată: Procentul dozei specificate pe care volumul tumoral respectiv a încasat-o.

Pe parcursul întregului tratament, volumul tumoral a arătat o scădere semnificativă. Inițial, volumul total al tumorii a fost de 1491.055 cm³, conform primului plan. Această reducere semnificativă a volumului tumoral indică o evoluție pozitivă a tratamentului, reflectând eficacitatea dozelor administrate în reducerea masei tumorale

**Figura 6.** Scanare CT la începutul tratamentului (CT1), stânga, respectiv scanare CT la finalizarea tratamentului (CT5), dreapta, imagini obținute din sistemul de planificare Monaco**Tabelul 5.** Organe la risc. Doza maximă. Constrângeri de doză.[1]

Organ	Planul 1/Max. Dose (Gy)	Planul 2/Max. Dose (Gy)	Planul 3/Max. Dose (Gy)	Planul 4/Max. Dose (Gy)	Planul 5/Max. Dose (Gy)	Constrângeri de doză (Gy)
Canal medular	-	12.035	9.478	9.478	9.645	Dmax < 45–50 Gy
Cochlea dreaptă	-	11.003	8.268	8.268	10.146	Dmax < 27.5 Gy
Cochlea stângă	-	11.004	8.489	8.489	12.801	
Mandibula	-	2.828	12.549	12.549	26.320	Dmax < 70–73.5 Gy
Glanda tiroidă	-	-	-	-	-	Dmean < 45 Gy
Trunchi cerebral	-	0.901	8.809	8.809	14.296	Dmax < 54 Gy

CONCLUZII

Tratamentul radioterapeutic al cancerului ORL este dificil din cauza anatomiei complexe, necesitând replanificări frecvente pentru a adapta dozele la modificările tumorii și ale structurilor normale. Replanificarea optimizează distribuția dozelor pentru a proteja organele la risc și reduce riscul de complicații și recidive. Studiul subliniază importanța monitorizării și ajustării tratamentului, propunând replanificarea ca standard în radioterapia pentru cancerul ORL, contribuind la îmbunătățirea rezultatelor și calității vieții pacienților.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Bisello S., Savino C., Benini A., Cardano R., Nguyen Nam P., Deodato F., Macchia G. , Milly Buwenge, Cammelli S., Wondemagegnehu T., Kamal Uddin A. F. M., Rizzo S., Bazzocchi A., Lidia Strigari L., Morganti A.G., (2022), *Dose–Volume Constraints for Organs at risk in Radiotherapy (CORSAIR)*, An “All-in-One” Multicenter–Multidisciplinary Practical Summary.; Curr. Oncol., Vol. 29, pp. 7024-7033.
- [2] Ezzell, G. A. etc. (2009), *IMRT commissioning: Multiple institution planning and dosimetry comparisons, a report from AAPM task group 119*. Med. Phys. Vol.36, pp. 5359–5373
- [3] Khan F. M., Gerbi B.J.. (2012), *Treatment planning in radiation oncology*. (Wolters Kluwer Health.).
- [4] Figen M, Çolpan Ö. D, Duman E, Prestwich R, Dyker K, Cardale K, Ramasamy S, Murray P, Şen M. (2020), *Radiotherapy for Head and Neck Cancer: Evaluation of Triggered Adaptive, Replanning in Routine Practice*. Front Oncol., Nov 12;10:579917. doi: 10.3389/fonc.2020.579917. PMID: 33282734; PMCID: PMC7690320.
- [5] Halperin E, Wazer D, Perez C, Brady L. (2013), *Perez and Brady's: principles and practice of radiation oncology*, 6e.
- [6] <https://www.mgcancerhospital.com/volume-modulated-arc-therapy-vmat/> (accesat 27.04.2024)
- [7] Otto, K. (2008), *Volumetric modulated arc therapy: IMRT in a single gantry arc*. Med. Phys. 35, 310–317
- [8] Taylor A., Powell M.E.B., (2004), *Intensity-modulated radiotherapy-what is it?*, National Library of Medicine

APLICAȚII ALE ECOGRAFIEI

Patrick BULZAN¹, Adina-Monica TODERAȘ²

¹Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatica și Științe, student anul I Fizica Explorărilor și Terapiilor Biomedicale, Oradea, România

²Universitatea din Oradea - profesor Fizică, Oradea, România

Rezumat: Studiul desfășurat între ianuarie 2018 și martie 2019 la Spitalul Clinic Județean de Urgență Oradea a evaluat pacienții cu leziuni focale hepatice, comparând ecografia cu tomografia computerizată (CT). Diagnosticul final a fost corelat cu observații chirurgicale și histopatologice. Rezultatele au indicat că tumorile hepatice au fost mai frecvente la bărbații din mediul urban, iar metastazele au predominat. Sensibilitatea ecografiei a fost de 84,38%, iar a CT-ului de 100%. Leziunile maligne au fost mai frecvente decât cele benigne, evidențiind utilitatea CT-ului în diagnostic.

Cuvinte cheie: Tumoare hepatică, leziune hepatică, CT, RMN, VHB, VHC, CHC.

INTRODUCERE

Bazele ecografiei se bazează pe o serie de descoperiri științifice importante. Totul a început în 1822, când s-a măsurat viteza sunetului în apă, punând bazele utilizării undelor sonore.

În 1877, teoria propagării undelor sonore a adus o înțelegere mai profundă a acestora, iar în 1880, frații Curie au descoperit efectul piezoelectric, esențial pentru generarea și detectarea ultrasunetelor. Dezvoltările tehnologice, precum inventarea amplificatoarelor electronice și a hidrofonomului în timpul Primului Război Mondial, au condus la apariția sonarului, care a contribuit ulterior la ecografia medicală.

Alte inovații, precum tranzistorul și calculatoarele digitale, au îmbunătățit performanțele ecografiei. Ultrasunetele au fost inițial folosite în medicină pentru terapie, iar prima utilizare în diagnosticare a avut loc în 1942. Primele sisteme de imagistică ultrasonoră au fost create în 1952. Progresele din anii 1960 au revoluționat diagnosticul medical, transformând ecografia într-o metodă modernă, neinvazivă și extrem de avansată

MATERIALE ȘI METODE

Studiul, desfășurat la Spitalul Clinic Județean de Urgență Oradea între ianuarie 2018 și martie 2019, a investigat pacienți cu mase focale hepatice, analizând valoarea diagnostică a ecografiei comparativ cu tomografia computerizată (CT). Diagnosticul final a fost corelat cu observațiile chirurgicale, serologice și histopatologice.

Studiul a inclus pacienți cu metastaze hepatice ale cancerului colorectal (MHCCR), care au fost evaluați prin ecografie abdominală, CT cu substanță de contrast și, în anumite cazuri, rezonanță magnetică nucleară (RMN), oferind detalii suplimentare despre structurile vasculo-biliare și alte leziuni hepatice.

Pacienții cu tumori voluminoase care necesitau hepatectomii extinse au beneficiat de volumetrie hepatică pentru a evalua volumul hepatic rezidual, iar pentru detectarea metastazelor extrahepatice, CT-ul abdominal a fost utilizat. Investigațiile au fost realizate cu aparate de ultimă generație (HITACHI pentru ecografii, SIEMENS SOMATOM pentru CT și PHILIPS INGENIA 3 Tesla pentru RMN), cu protocoale detaliate de examinare, incluzând administrarea de substanțe de contrast și secțiuni precise pentru imagini de înaltă calitate.

REZULTATE ȘI DISCUȚII

Studiul a analizat un lot de 79 de pacienți cu leziuni focale hepatice, evaluând indicatori precum vârsta, mediul de proveniență, sexul, patologia asociată și prezența factorilor de risc. Tumorile hepatice au fost mai frecvente la bărbații din mediul urban, cu o vârstă medie de 68 de ani. Diagnosticul final a identificat diverse tipuri de leziuni hepatice, inclusiv metastaze (22 cazuri), abcese (16 cazuri), hemangioame (11 cazuri) și chisturi simple (5 cazuri). Sensibilitatea ecografiei (USG) a fost de 84,38%, iar cea a tomografiei computerizate (CT) a fost de 100%. Leziunile maligne au fost mai numeroase decât cele benigne.

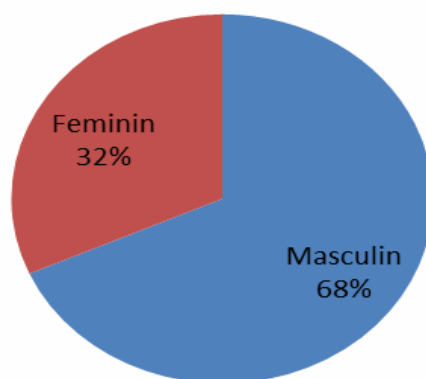


Figura 1. Distribuția în funcție de sex a pacienților cu metastaze hepatice

Din numărul de 79 de pacienți selectați, lotul a cuprins 54 bărbați (31,65%) și 25 femei (68,35%) (fig. 2), în raport ~2:1. Repartizarea lotului pe grupe de vârstă a evidențiat o frecvență și incidență crescută pe măsura înaintării în vârstă (figura 7.2), cu un vârf la decada 60-69 de ani (36,71% dintre pacienți).

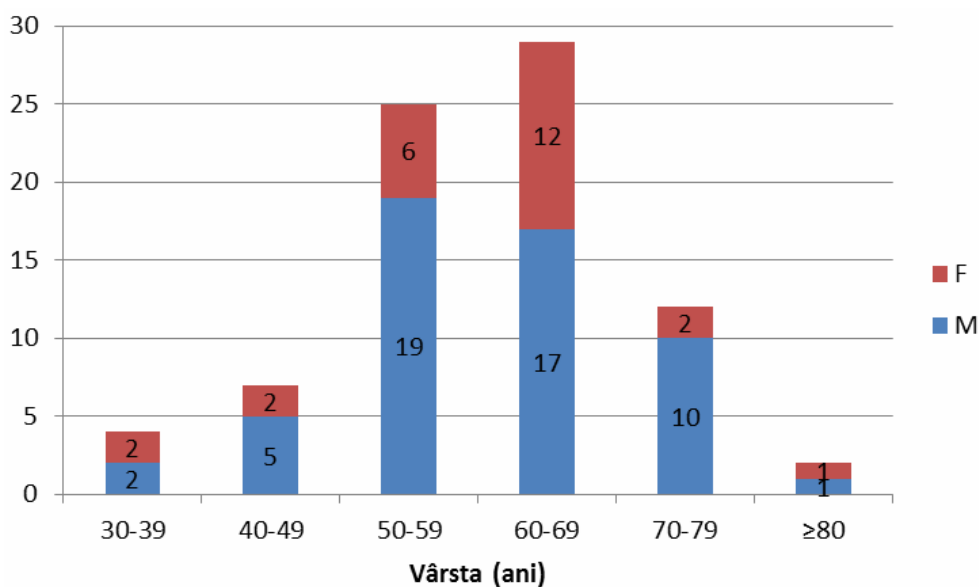


Figura 2 Distribuția pacienților, bărbați și femei, pe grupe de vârstă

În privința etiologiei, factorul etiologic prezumat a fost, în majoritatea cazurilor (figura 3), infecția virală cronică VHB (30,4%), respectiv VHC (56,96%), la 2 pacienți fiind evidențiată dubla infecție cu virusuri hepatitice (B+C), iar la 10 pacienți (toți de sex masculin !) etiologie mixtă virală B și etanolică.

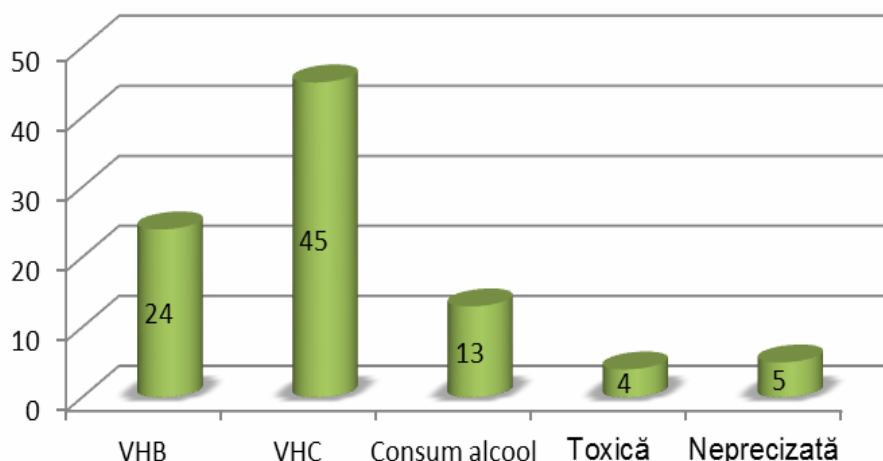


Figura 3 Etiologia probabilă a bolii hepatice la pacienții CHC

Prin examenul CT am determinat localizarea, tipul și severitatea leziunilor hepatice, și anume gradul de fibroză și nodularitatea. Majoritatea leziunilor au fost localizate în lobul drept (34 de cazuri, 43,04%), respectiv stâng+drept (36 de cazuri, 45,57%) (figura 4).

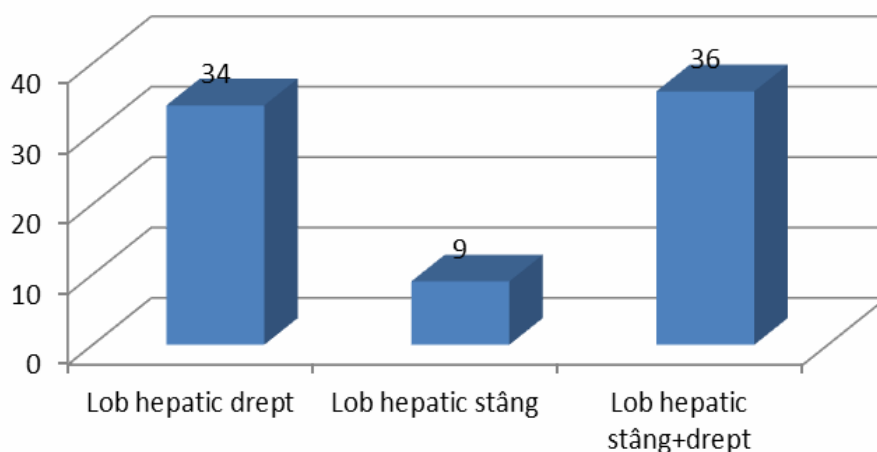


Figura 4 Localizarea leziunilor hepatice la pacienții CHC

În privința gradului de nodularitate hepatică decelat prin imagistica RMN, la un număr de 7 pacienți (8,86%) am vizualizat un ficat fără noduli (dar toți prezentau fibroză parenchimatoasă, 5 diagnosticați clinic CHC – diagnostic infirmat în urma explorării RMN). Într-un mare număr de cazuri (30 de pacienți, reprezentând 37,97%) am înregistrat un aspect hepatic multinodular (tabel 1, figura 5).

Tabelul 1- Nodularitatea hepatică determinată prin CT

Variante	cazuri	%
Fara noduli	7	8,86
1 nodul	20	25,32
2 noduli	7	8,86
3 noduli	5	6,33
4 noduli	7	8,86
Multinodular	30	37,97
Leziuni difuze	3	3,80

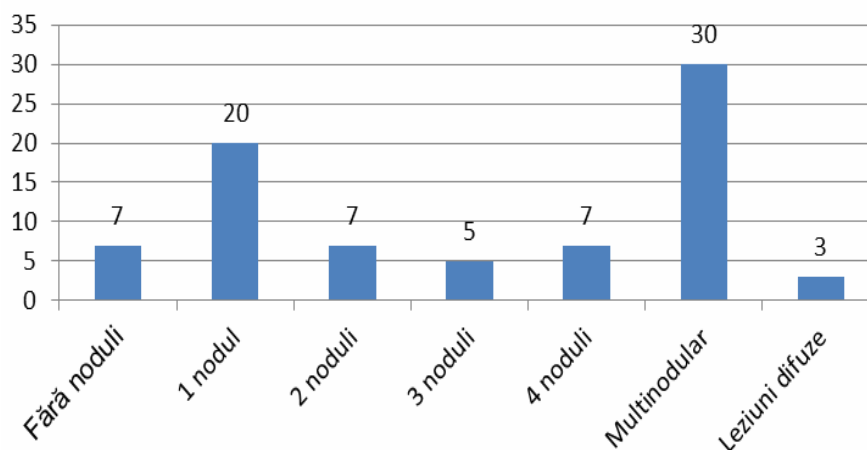


Figura 5 Numărul nodulilor hepatici la pacienții CHC

CONCLUZII

Diagnosticul ecografic al patologiilor hepatice se bazează pe evaluarea unor parametri precum dimensiunea și volumul ficatului, ecostructura și ecogenitatea acestuia, precum și analiza vaselor hepatice. Pentru o evaluare completă, sunt examinate și splina, colecistul și căile biliare. În cazul hepatopatiilor difuze, ecografia identifică modificările parenchimului și dilatarea sistemului venos port.

Steatoza hepatică și hepatita cronică prezintă ecostructură omogenă, în timp ce ciroza și unele forme de hepatită cronică arată o textură nodulară. Ecogenitatea măsoară încărcarea grasă a ficatului, iar atenuarea indică gradul de fibroză. Deși hipertensiunea portală nu se diagnostichează ecografic, ecografia ajută la evaluarea șunturilor porto-sistemice și a permeabilității sistemului venos.

Ecografia detectează tumori hepatice mai mari de 10 mm, diferențiind formațiunile chistice de cele solide și stabilind relația lor cu vasele hepatice. Tumorile benigne solide, cum ar fi angioma hepatică, au un aspect caracteristic în 90% din cazuri, iar adenomul hepatic apare hipoeogen și omogen. Tumorile maligne, precum hepatomul și metastazele, au caracteristici ecografice distincte. Pentru diagnostic precis, ecografia trebuie completată cu investigații neinvazive, precum CT sau RMN, corelate cu date clinice și biochimice.

Mulțumiri: Spitalul Județean din Oradea, Fizician Medical Ioan Oswald.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Purysko A.S., Remer E.M., Veniero J.C. (2011), *Detectarea și caracterizarea leziunilor hepatice focale cu GD-EOB-DTPA*. Clinical Radiology; Vol.66, pp. 673-84.
- [2] Albrecht T. (2005), *Sonography of Liver Metastases*. In: Lencioni R., Cioni D., Bartolozzi C., *Focal Liver Lesions. Detection, Characterization, Ablation*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp. 261-274
- [3] Ishak K.G., Goodman Z.D., Stocker J.T. (2001), *Tumorile hepatice și ale căilor biliare intrahepatice*. In: Rosai J. SLH, redactor. ed. Atlasul patologiei tumorale. Washington, DC: Institutul Forțelor Armate de Patologie
- [4] Ciurea T., Săftoiu A. (2000), Tumorile hepatice. În Hepatologie clinică, sub redacția Paulina Ciurea, Tudorel Ciurea, Editura Medicală Universitară Craiova, pp. 313-344
- [5] Horton K.M., Bluemke D.A., Hruban R.H., etc. (1999), Imagistica CT și MR a tumorilor benigne hepatice și biliari. Radiographics; Vol. 19, pp. 431-51.

DINAMICA CÂMPURILOR ELECTROMAGNETICE ÎNTR-UN UNIVERS CURBAT DE GRAVITAȚIE

Bogdan Mihai CRISTE¹, Eugen-Victor MACOCIAN²

¹Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe, student master anul I Fizica Explorărilor și Terapiilor Biomedicale, Oradea, România

²Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe, Departamentul de Fizică

Rezumat: *Lucrarea descrie legătura dintre două domenii importante ale fizicii, și anume electrodinamica și teoria relativității generale. Lucrarea cuprinde interacțiunea complexă dintre câmpurile electromagnetice și geometria spațiu-timpului în contextul teoriei relativității generale a lui Einstein. În universul curbat de gravitație, structura spațiu-timpului este influențată de prezența materiei și a energiei, afectând propagarea și comportamentul câmpurilor electromagnetice. Fiind o lucrare ce ține de fizica teoretică, conținutul lucrării nu va conține aspecte practice, numai implicații teoretice.*

Cuvinte cheie: *tensorul câmpului electromagnetic, ecuațiile lui Maxwell, spațiu-timp curbat, lentilă gravitațională.*

INTRODUCERE

În cadrul teoriei relativității generale, gravitația este interpretată ca o curbura a spațiu-timpului provocată de distribuția materiei și a energiei. Această paradigmă are implicații profunde asupra tuturor fenomenelor fizice, inclusiv asupra electrodinamicii, ramura fizicii care studiază câmpurile electromagnetice. Legătura dintre electromagnetism și gravitație constă în modul în care câmpurile electromagnetice se comportă într-un spațiu-timp curbat. Ecuațiile lui Maxwell, care descriu dinamica câmpurilor electromagnetice în spațiu și timp, trebuie reformulate pentru a include efectele gravitației. Într-un spațiu-timp curbat, aceste ecuații se modifică pentru a reflecta influența metricii spațiu-timpului asupra câmpurilor electromagnetice[1]. Această interacțiune este esențială pentru înțelegerea unor fenomene cum ar fi deplasarea spectrală gravitațională, în care frecvența undelor electromagnetice este modificată de gravitație, și lentila gravitațională, unde traiectoria luminii este curbată de prezența unui câmp gravitațional puternic. Această conexiune între electrodinamică și relativitatea generală este crucială pentru interpretarea corectă a observațiilor astronomice, cum ar fi radiația de fond cosmic și emisiile din jurul găurilor negre, contribuind la dezvoltarea unei înțelegeri mai complete a universului nostru. Atunci când câmpurile electromagnetice se propagă sub formă de unde electromagnetice printr-un spațiu-timp curbat, traiectoriile lor sunt deviate, frecvențele sunt modificate și intensitățile pot fi concentrate sau dispersate. Aceste efecte sunt observabile în fenomene precum deplasarea spectrală gravitațională, unde undele electromagnetice își schimbă frecvența în prezența unui câmp gravitațional puternic, și lentila gravitațională, unde lumina este deviată de corpurile masive, creând multiple imagini ale aceleași surse luminoase.

MATERIALE ȘI METODE

Electrodinamica este ramura fizicii care studiază interacțiunile și fenomenele electromagnetice. Acest domeniu se fundamentează pe ecuațiile lui Maxwell, un set de patru ecuații diferențiale parțiale care descriu comportamentul câmpurilor electrice și magnetice și modul în care acestea se influențează reciproc și se propagă prin spațiu sub forma unor unde denumite unde electromagnetice. Sub formă diferențială sau locală, ecuațiile leagă câmpul electromagnetic de sursele sale, adică de densitățile de sarcină și curenți. Ecuațiile lui Maxwell în forma lor generală, adică în vid sunt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (4) \end{array} \right.$$

unde $\vec{E}$ este intensitatea câmpului electric, $\vec{B}$ este inducția magnetică, ρ este densitatea de sarcină, $\vec{J}$ este densitatea de curent, $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$ este permitivitatea vidului și $\mu_0 = 1.256 \times 10^{-6} \frac{N}{A^2}$ este permeabilitatea vidului. Ecuația (1) este legea lui Gauss care descrie relația dintre un câmp electric și sarcinile electrice, afirmând că divergența unui câmp electric este proporțională cu densitatea de sarcină. Ecuația (2) este analogia magnetică a legii lui Gauss, esența acestei legi fiind faptul că câmpul magnetic este un câmp vectorial solenoidal, adică cu divergență nulă, rezultând faptul că nu există monopoli magnetici, sursele câmpului magnetic fiind dipolii magnetici iar liniile de câmp sunt bucle închise. Ecuația (3) este legea lui Faraday aceasta fiind o descriere matematică a fenomenului de inducție electromagnetică, legea afirmând faptul că un câmp electric rotativ induce un câmp magnetic variabil în timp. Ecuația (4) este legea circuitală a lui Ampere cu corecția lui Maxwell afirmând că și câmpurile magnetice sunt legate de câmpurile electrice.

Teoria relativității generale este o teorie metrică a gravitației, publicată de către Albert Einstein în 1915, aceasta reprezentând descrierea gravitației în fizica modernă. Într-un astfel de cadru gravitația nu mai este o forță ca și în contextul gravitației newtoniene, ci un efect geometric care rezultă din curbura spațio-temporală cauzată de prezența masei sau ceea ce este echivalentul masei în teoria relativității, energia[2]. Ecuația care relaționează geometria spațiu-timpului cu materia din interiorul acesteia poartă denumirea de ecuația de câmp a lui Einstein, aceasta având următoarea formă[3]:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (5)$$

unde $G_{\mu\nu}$ este tensorul de curbura Einstein, Λ este constanta cosmologică, $g_{\mu\nu}$ este tensorul metric, $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$ este constanta gravitațională, $c = 299\,792\,458$ m/s este viteza luminii în vid și $T_{\mu\nu}$ este tensorul energie-impuls.

Tensorul Einstein este definit:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (6)$$

unde $R_{\mu\nu}$ este tensorul Ricci și R este scalarul Ricci.

Constanta Einstein este definită:

$$k = \frac{8\pi G}{c^4} = 2.07665 \times 10^{-43} N^{-1} \quad (7)$$

Luând în considerare faptul că în majoritatea situațiilor $\Lambda = 0$, ecuația de câmp poate lua următoarea formă:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k T_{\mu\nu} \quad (8)$$

Expresia din stânga reprezintă curbura spațiu-timpului determinată de metrică; expresia din dreapta reprezintă conținutul de energie-impuls al spațiu-timpului. Ecuația poate fi interpretată ca un set de ecuații care dictează modul în care energia-impulsul determină curbura spațiu-timpului. Împreună cu ecuația geodezică care dictează modul în care materia în cădere liberă se deplasează în spațiu-timp, aceste ecuații formează nucleul formulării matematice a relativității generale. Soluțiile ecuațiilor de câmp ale lui Einstein sunt metrici ale spațiu-timpului. Aceste metrici descriu structura spațiu-timpului, inclusiv mișcarea inertială a obiectelor din spațiu-timp. Deoarece ecuațiile de câmp sunt neliniare, ele nu pot fi întotdeauna rezolvate complet (adică fără a se face aproximări). De exemplu, nu se cunoaște o soluție completă pentru un spațiu-timp cu două corpuri masive în el (care

este un model teoretic al unui sistem stelar binar, de exemplu steaua Sirius). Cu toate acestea, în aceste cazuri se fac, de obicei, aproximații. Acestea sunt denumite în mod obișnuit aproximații postnewtoniene. Chiar și așa, există mai multe cazuri în care ecuațiile de câmp au fost rezolvate complet, iar acestea se numesc soluții exacte. Numărul acestor soluții este mic, două dintre acestea fiind[1]:

- Soluția Schwarzschild care descrie câmpul gravitațional din exteriorul unei mase sferice, luând în calcul două simplificări, și anume că sarcina electrică și momentul cinetic sunt nule, soluția fiind utilă în cazul corpurilor astronomice cu rotație lentă precum planete și stele.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 \quad (9)$$

Luând în considerare faptul că $\frac{2GM}{c^2} = r_s$ este raza Schwarzschild și $d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 = d\Omega^2$, metrica va avea următoarea formă matematică:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 - c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 \quad (10)$$

- Soluția Reissner-Nordstrom care descrie câmpului gravitațional al unui corp în repaus, deci nerotațional, sferic simetric și încărcat electric.

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \quad (11)$$

unde τ este timpul propriu, t este coordonata temporală măsurat de un ceas staționar, r este coordonata radială, (θ, φ) sunt unghiurile sferice și $r_Q^2 = \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}$ este o scară de lungime caracteristică.

Matematica relativității generale este complicată necesitând calcul tensorial. Utilizarea intensă a calculului tensorial este o consecință a principiului covarianței. Acesta este, în esență, generalizarea principiului relativității restrânse, prin care se urmărește ca legile fizicii să aibă aceeași formă matematică în toate sistemele de referință, ceea ce înseamnă că toate sistemele de referință sunt, din punct de vedere fizic, echivalente. Acest aspect sugerează că legile fizicii ar trebui scrise în termeni de tensori, ale căror legi de transformare covariantă și contravariantă pot oferi invarianța de formă căutată. În relativitatea generală metrica Minkowski este înlocuită cu tensorul metric și derivata parțială este înlocuită cu derivata covariantă:

$$\begin{cases} \eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \nabla_\mu \end{cases} \quad (12)$$

Matematic, câmpul electromagnetic este descris de un tensor de rangul doi, antisimetric care este definit[2]:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \quad (13)$$

După cum rezultă din ecuație, tensorul este definit în funcție de un vector covariant, numit potențial electromagnetic, ale cărui componente se transformă la trecerea de la un sistem de referință la altul după următoarea lege de transformare:

$$\bar{A}_\beta = \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\beta} A_\gamma \quad (14)$$

Luând în calcul această lege, putem determina legea de transformare a tensorului câmpului electromagnetic:

$$\bar{F}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{A}_\beta}{\partial \bar{x}^\alpha} - \frac{\partial \bar{A}_\alpha}{\partial \bar{x}^\beta} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha} \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\beta} A_\gamma \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\beta} \left(\frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^\alpha} A_\delta \right) \quad (15)$$

aplicând regula lanțului pentru derivatele din relația (15):

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\alpha\beta} &= \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta} A_\gamma + \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial A_\gamma}{\partial \bar{x}^\alpha} - \frac{\partial^2 x^\delta}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta} A_\delta - \frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial A_\delta}{\partial \bar{x}^\beta} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial A_\gamma}{\partial x^\delta} - \frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial A_\delta}{\partial x^\gamma} = \\ &= \frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\beta} \left(\frac{\partial A_\gamma}{\partial x^\delta} - \frac{\partial A_\delta}{\partial x^\gamma} \right) = \frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\beta} F_{\delta\gamma} \end{aligned} \quad (16)$$

Deci legea de transformare este:

$$\bar{F}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\beta} F_{\delta\gamma} \quad (17)$$

Relația (13) este aceeași atât în cadrul spațiului Minkowski al relativității restrânse, cât și în spațiu-timpul curbat al relativității generale, datorită simetriei simbolurilor Christoffel:

$$F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu A_\mu - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A_\mu \quad (18)$$

Luând în considerare proprietatea de simetrie $\Gamma_{\beta\alpha}^\mu = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ se obține:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}$$

REZULTATE ȘI DISCUȚII

Ne propunem să scriem ecuațiile lui Maxwell într-un spațiu-timp curbat. Pentru a realiza acest lucru vom lua în considerare următorul tensor electromagnetic:

$$F_{\mu\vartheta} = \frac{\partial A_\vartheta}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\vartheta}$$

Utilizând identitatea Bianchi, se obține următoarea ecuație[2]:

$$\frac{\partial F_{\mu\vartheta}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F_{\vartheta\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\vartheta} = 0 \quad (19)$$

Și folosind tensorul electromagnetic, avem:

$$\frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial A_\vartheta}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\vartheta} - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial x^\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial x^\vartheta} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\mu} \right) = 0 \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial^2 A_\vartheta}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\vartheta} \right) + \left(\frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\vartheta} - \frac{\partial^2 A_\vartheta}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} \right) + \left(\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\vartheta \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x^\vartheta \partial x^\mu} \right) = 0 \quad (21)$$

Se observă că termenii din această expresie sunt anti-simetrice față de permutările indicilor μ, ϑ și σ . Astfel, vom folosi proprietățile simbolului Levi-Civita pentru a extrage acești termeni și obținem:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \left(\frac{\partial^2 A_\gamma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 A_\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \right) + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \left(\frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 A_\gamma}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \right) + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \left(\frac{\partial^2 A_\beta}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} \right) = 0 \quad (22)$$

Această expresie este echivalentă cu:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}) = 0 \quad (22)$$

Într-un spațiu-timp curbat această ecuație devine:

$$\nabla_\alpha (\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}) = 0 \quad (23)$$

Această ecuație este legea Gauss-Faraday deoarece încorporează două ecuații Maxwell, și anume analogia magnetică a legii lui Gauss și legea lui Faraday.

Pentru electromagnetism densitatea lagrangiană are două componente, și anume o componentă de câmp și încă una de sursă[4]:

$$L = L_{c\grave{a}mp} + L_{int} = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - A_\alpha J^\alpha \quad (24)$$

Lagrangianul de interacțiune include cvadrivectorul densitate de curent, acesta reprezentând o abreviere a mai multor termeni care exprimă curenții electrici ai altor câmpuri încărcate. Ecuațiile Lagrange se enunță după cum urmează:

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} \right) - \frac{\partial L}{\partial A_\alpha} = 0 \quad (25)$$

Dacă notăm:

$$\begin{cases} F^{\tau\sigma} = F_{\mu\vartheta} \eta^{\mu\tau} \eta^{\sigma\vartheta} \\ \frac{\partial (\partial_\mu A_\vartheta)}{\partial (\partial_\rho A_\sigma)} = \delta_\mu^\rho \delta_\vartheta^\sigma \end{cases} \quad (26)$$

vom obține:

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} = -\frac{1}{4\mu_0} \frac{\partial}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} (F_{\mu\vartheta} \eta^{\mu\tau} \eta^{\vartheta\sigma} F_{\tau\sigma}) = -\frac{1}{4\mu_0} \eta^{\mu\tau} \eta^{\vartheta\sigma} \left(F_{\tau\sigma} (\delta_\mu^\beta \delta_\vartheta^\alpha - \delta_\vartheta^\beta \delta_\mu^\alpha) + F_{\mu\vartheta} (\delta_\tau^\beta \delta_\sigma^\alpha - \delta_\sigma^\beta \delta_\tau^\alpha) \right) = -\frac{F^{\beta\alpha}}{\mu_0} \quad (27)$$

Al doilea termen este:

$$\frac{\partial L}{\partial A_\alpha} = -J^\alpha \quad (28)$$

Într-un final, ecuația devine:

$$\frac{\partial F^{\beta\alpha}}{\partial x^\beta} = \mu_0 J^\alpha \quad (29)$$

iar dacă trecem de la spațiu Minkowski la spațiu-timpul curbat, ecuația devine:

$$\nabla_\beta F^{\beta\alpha} = \mu_0 J^\alpha \quad (30)$$

care este legea Gauss-Ampere, aceasta încorporând la fel ca ecuația precedentă două ecuații Maxwell, și anume legea lui Gauss și legea lui Ampere.

Într-un final, ecuațiile lui Maxwell în contextul relativității generale se reduc de la patru ecuații diferențiale parțiale la 2 ecuații tensoriale și anume legea Gauss-Faraday și legea Gauss-Ampere:

$$\begin{cases} \nabla_\alpha (\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}) = 0 \\ \nabla_\beta F^{\beta\alpha} = \mu_0 J^\alpha \end{cases} \quad (31)$$

Legea Gauss-Faraday afirmă că fluxul câmpului electromagnetic, într-un spațiu-timp curbat, se conservă, adică nu se schimbă în timp. Iar legea Gauss-Ampere exprimă modul în care câmpul electromagnetic interacționează cu sursele de curent într-un spațiu-timp curbat, stabilind că divergența câmpului electromagnetic este proporțională cu densitatea de curent electric în acel spațiu-timp. Ne-am atins scopul acestei lucrări, și anume determinarea ecuațiilor care descriu dinamica câmpului electromagnetic în cadrul relativității generale.

Utilizarea modernă a telescoapelor orbitale a permis o gamă mult mai largă de observații astronomice care confirmă predicțiile relativității generale, puterea unei teorii științifice constând în numărul de predicții verificabile pe care aceasta le poate face și numărul de fenomene pe care aceasta le poate explica. Una dintre consecințele metricii puternic deformate din apropierea unui corp foarte masiv, cum ar fi soarele, este îndoirea luminii în apropierea acestuia. Un fenomen cunoscut sub denumirea de lentilă gravitațională. Matematic, acest fenomen poate fi descris utilizând geodezicele Schwarzschild, acestea modelând mișcarea particulelor de test în câmpul gravitațional al unei mase centrale fixe. În limita în care masa particulei ajunge la zero (sau, în mod echivalent, dacă lumina se îndreaptă direct spre masa centrală, când scara de lungime ajunge la infinit), ecuația orbitei devine[5]:

$$\varphi = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{b^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{1}{r^2}}} \quad (32)$$

Extinderea în puteri de $\frac{r_s}{r}$, termenul de ordinul întâi din această formulă dă deviația unghiulară aproximativă $\delta\varphi$ pentru o particulă fără masă care vine de la infinit și se întoarce la infinit:

$$\delta\varphi = \frac{2r_s}{b} = \frac{4GM}{c^2 b} \quad (33)$$

Aici b este parametrul de impact, ceva mai mare decât distanța de cea mai apropiată apropiere, r_3 :

$$b = r_3 \sqrt{\frac{r_3}{r_3 - r_s}} \quad (34)$$

Deși această formulă este aproximativă, ea este exactă pentru majoritatea măsurătorilor de lentile gravitaționale, datorită micimii raportului $\frac{r_s}{r}$. Pentru lumina care se apropie mult de suprafața soarelui, deviația unghiulară aproximativă este de aproximativ 1,75 secunde de arc, adică aproximativ o milionime de cerc. Mai general, geodezica unui fascicul emis de o sursă de lumină situată la o coordonată radială $r = \frac{1}{u} \in [r_s, +\infty]$ poate fi calculată după cum urmează, prin aplicarea ecuației:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = r_s u^3 - u^2 + \frac{1}{b^2} \quad (35)$$

Ecuția poate fi derivată sub forma:

$$2 \frac{du}{d\varphi} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = 3r_s u^2 \frac{du}{d\varphi} - 2u \frac{du}{d\varphi} \quad (36)$$

ceea ce duce la:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = \frac{3}{2} r_s u^2 - u \quad (37)$$

Această ecuație cu derivata a doua poate fi integrată numeric după cum urmează printr-o metodă Runge-Kutta de ordinul 4, considerând un pas de mărime $\Delta\varphi$ și cu:

$$\begin{cases} k_1 = \frac{d^2 u}{d\varphi^2}(u) \\ k_2 = \frac{d^2 u}{d\varphi^2}\left(u + \frac{\Delta\varphi}{2} \frac{du}{d\varphi}\right) \\ k_3 = \frac{d^2 u}{d\varphi^2}\left(u + \frac{\Delta\varphi}{2} \frac{du}{d\varphi} + \frac{\Delta\varphi^2}{4} k_1\right) \\ k_4 = \frac{d^2 u}{d\varphi^2}\left(u + \Delta\varphi \frac{du}{d\varphi} + \frac{\Delta\varphi^2}{2} k_2\right) \end{cases} \quad (38)$$

Valoarea la etapa următoare $\frac{du}{d\varphi}(\varphi + \Delta\varphi)$ este:

$$\frac{du}{d\varphi}(\varphi) + \frac{\Delta\varphi}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (39)$$

și valoarea din etapa următoare $u(\varphi + \Delta\varphi)$ este:

$$u(\varphi) + \Delta\varphi \frac{du}{d\varphi}(\varphi) + \frac{\Delta\varphi^2}{6} (k_1 + k_2 + k_3) \quad (40)$$

Pasul $\Delta\varphi$ poate fi aleasă ca fiind constantă sau adaptivă, în funcție de precizia cerută pe traiectorie $r = u^{-1}$. Aceste calcule și ecuații oferă o bază matematică destul de solidă pentru înțelegerea fenomenului de lentilă gravitațională și pentru interpretarea observațiilor astronomice asociate acestuia.

CONCLUZII

- Ecuatiile lui Maxwell în contextul relativității generale, reduse la două ecuații tensoriale - legea Gauss-Faraday și legea Gauss-Ampere - reprezintă fundația pentru înțelegerea dinamicii câmpului electromagnetic într-un spațiu-timp curbat.
- Matematica din spatele lentilei gravitaționale, derivată din metrica Schwarzschild, oferă o modalitate precisă de calcul pentru deviația luminii și geodezicele particulelor de test în prezența unui câmp gravitațional puternic.
- Descrierea matematică a câmpului electromagnetic într-un spațiu-timp curbat, bazată pe ecuațiile lui Maxwell, oferă o înțelegere detaliată a modului în care acest câmp interacționează cu geometria spațiului-timp deformat de prezența masei și energiei.
- Formulele matematice furnizează o bază solidă pentru modelele teoretice și observațiile experimentale ale lentilelor gravitaționale și ale comportamentului câmpului electromagnetic în aceste condiții, contribuind la validarea și dezvoltarea teoriei relativității generale.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Adler, R., Bazin M., Schiffer M (1965), *Introduction to General Relativity*, Ed. McGraw-Hill
- [2] Misner, C. W., Thorne, Wheeler, K. S. (1973), *John Archibald Gravitation*, Princeton University Press
- [3] Feynman, R. P.; Morino, F. B.; Wagner, W. G. (1995). *Feynman Lectures on Gravitation*, Ed. Brian Hartfield
- [4] Landau, L. D., Lifshitz, E. M. (1975), *Classical Theory of Fields*, Butterworth Heinemann
- [5] <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9907034>

SPECTRUL ÎN IR AL CO₂ ȘI APLICAȚII ÎN DETECTAREA COMPOZIȚIEI CORPURILOR CEREȘTI

Monica FLORA¹, Mădălina COJOCARU²

¹Universitatea din Oradea, lector dr. Departamentul de Fizică, floramoni@gmail.com

²Universitatea din Oradea, student anul II Fizică Medicală

Rezumat: Cunoașterea formulei moleculare a compusului analizat prin spectroscopie IR simplifică modul de interpretare al informației aduse prin înregistrarea benzilor de absorbție și dă certitudine atribuirilor structurale. În cele ce urmează vă sugerăm o cale rapidă de identificare a grupărilor funcționale existente în compușii organici a căror compoziție moleculară nu este cunoscută din corpurile cerești știindu-se că dioxidul de carbon (O=C=O) din aerul atmosferic poate duce la înregistrarea unei benzi de absorbție situate la 2349 cm⁻¹.

Cuvinte cheie: spectru, IR, molecula de CO₂ lungime de undă, telescop spațial, exoplanete.

INTRODUCERE

Spectroscopia IR presupune studierea absorbției radiației infraroșii (IR), aspect care poate cauza vibrații tranziționale în molecula analizată. Moleculele sunt compuse din atomi uniți prin legături chimice. Mișcarea atomilor și a legăturilor chimice determină apariția vibrațiilor caracteristice în urma absorbției radiației IR. Există două tipuri de vibrație: de întindere și îndoire. Diferitele grupe funcționale prezente într-o moleculă absorb radiație IR la anumite frecvențe caracteristice. Prin urmare, sunt oferite anumite valori caracteristice peak-ului identificat. Astfel, spectrul IR al unei anumite substanțe poate fi considerat ca fiind o amprentă a acesteia și care poate ajuta la identificarea ei. Spectroscopia IR este tehnica de identificare a moleculelor bazată pe analizarea lungimilor de undă absorbite specifice unei molecule sau a unei legături, produsă de mișcarea de vibrație a acesteia. Moleculele absorb fotoni cu lungimea de undă¹ specifică lor. Dioxidul de carbon (CO₂) este un gaz vital pentru viața pe Pământ. Este, de asemenea, un produs rezidual al activităților umane și este utilizat pe scară largă în agricultură și industrie. Prin urmare, detectarea sa precisă este de mare interes². Are o structură liniară, și este format dintr-un atom de carbon și doi de oxigen formând două legături duble C=O

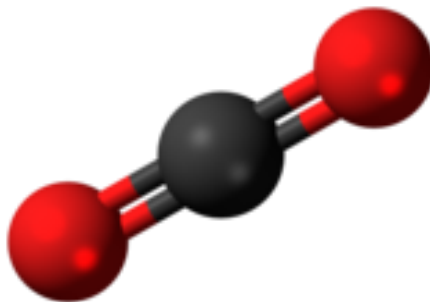


Figura 1. Molecula de dioxid de carbon

Molecula de dioxid de carbon are patru tipuri de vibrație (pentru că e o moleculă liniară compusă din trei atomi, ceea ce îi conferă 3n-5 grade de libertate și tot atâtea posibilități de vibrație). Dintre acestea pot fi observate vibrațiile în plan și în afara planului (forfecare respectiv balans) cu o bandă de absorbție la 667cm⁻¹ și vibrația de alungire asimetrică cu o bandă proeminentă la 2349cm⁻¹ așa cum se vede în fig. 2. Alungirea simetrică cel de al patrulea tip de vibrație nu este observabil în spectru deoarece fiind simetric nu se schimbă momentul de dipol al moleculei. Aceste benzi corespund la o absorbție în infraroșu mijlociu, adică între 2.5μm și 25μm.

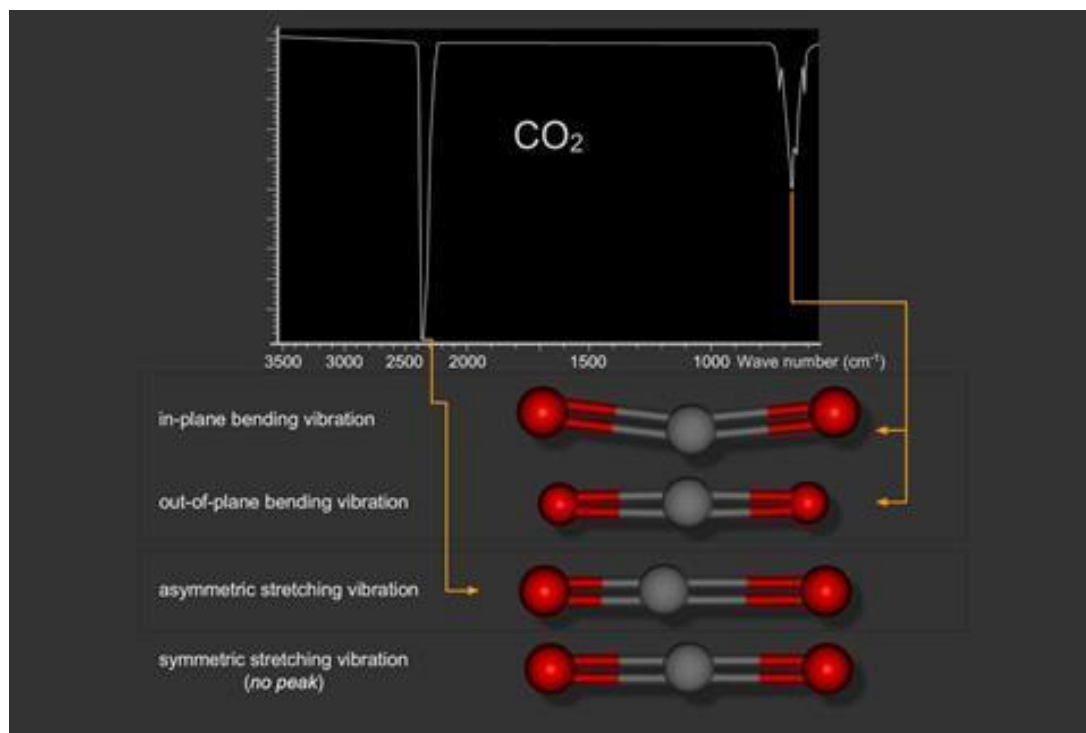


Figura 2. Modurile de vibrație ale moleculei CO₂

MATERIALE ȘI METODE

Pentru a observa exoplanetele, adică planete din alte sisteme decât sistemul solar, se utilizează metoda de tranzit, care implică detectarea unei scăderi în intensitatea luminoasă emisă de o stea, provocată de faptul că exoplaneta trece “în față” sau “în spatele” ei. Cantitatea de lumină care este blocată poate fi pusă într-un spectru de transmisie similar ca cel pentru spectroscopie pe Pământ, și dedus din el compoziția chimică a planetei respective.



Figura 3. Telescopul James Webb

Am folosit telescopul James Webb (JWST) [3] prezentat în fig.3. Acesta este dezvoltat de NASA, Agenția Spațială Europeană (ESA) și Agenția Spațială din Canada (CSA). Este conceput să ofere o rezoluție și o sensibilitate îmbunătățite în infraroșu față de Telescopul Hubble și va permite o gamă largă de investigații în domeniile astronomiei și cosmologiei, inclusiv observații ale unora dintre cele mai îndepărtate evenimente și obiecte din Univers, cum ar fi formarea primelor galaxii. Permite caracterizarea atmosferică detaliată a exoplanetelor potențial locuibile.

REZULTATE ȘI DISCUȚII

Mai jos în figurile 4 respectiv 5 sunt spectrele de transmisie ale planetei WASP-39b, din sistemul WASP-39, capturate de telescopul James Webb (JWST) [1].

Din aceste spectre se poate vedea compoziția planetei, și specific aici lungimile de undă la care absoarbe dioxidul de carbon, foarte vizibil aici este banda de absorbție de la $4.3\mu\text{m}$, care corespunde la 2349cm^{-1} , și vibrației prin alungire asimetrică a moleculei de CO_2 .

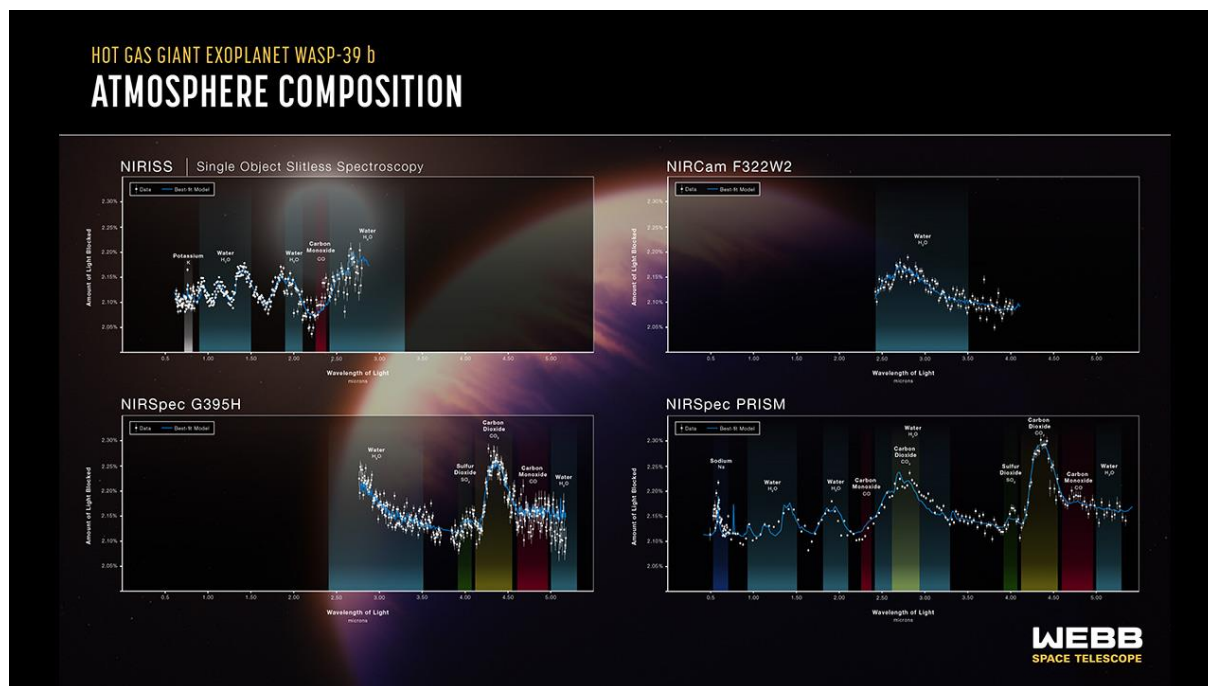


Figura 4. Spectrele de transmisie ale planetei WASP-39b

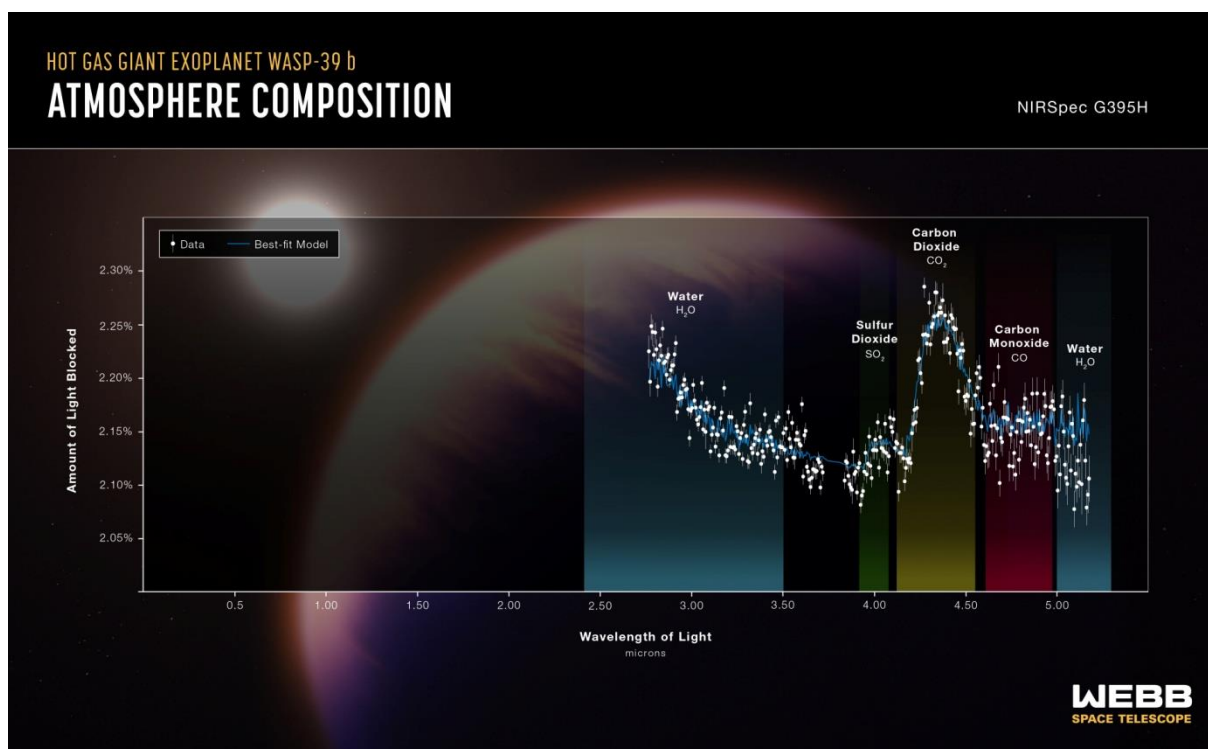


Figura 5. Spectrele de transmisie ale planetei WASP-39b (detaliu)

CONCLUZII

Spectrul IR al CO_2 de la $600 - 4000\text{ cm}^{-1}$ este prezentat mai jos în fig.6 și conține trei benzi. Benzile la 667 cm^{-1} și 2349 cm^{-1} se datorează vibrațiilor de îndoire, ν_2 , și, respectiv, asimetrică, ν_3 .

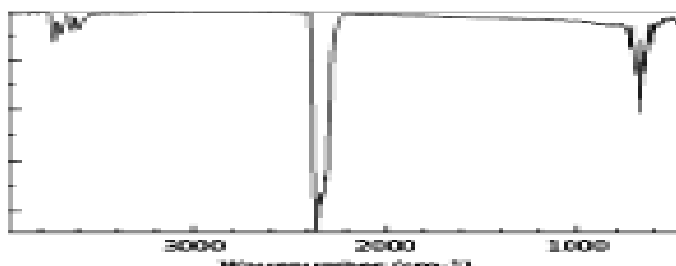


Figura 6. Spectrul IR al CO₂ de la 600 – 4000 cm⁻¹

O – C – O
v₂ = 667 cm⁻¹
întindere simetrică

O – C – O
v₁ = 1388 cm⁻¹
îndoire dublu degenerată

O – C – O
v₃ = 2349 cm⁻¹
întindere asimetrică

Având în vedere că frecvența vibrațională este dată de pulsația

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

se pune întrebarea care va fi efectul asupra frecvențelor dacă s-ar măsura spectrul ¹³CO₂? Este necesar doar un răspuns calitativ. (Sugestie: luăm în considerare mișcarea atomului de carbon în fiecare mod de vibrație).

Impuritatea OCS este izoelectronică cu CO₂ și ambele implică carbon legat dublu la două elemente din grupa 6 principală. Spectrul IR complet al OCS este prezentat în fig.5. Frecvențele de absorbție corespunzătoare v₁, v₂ și v₃ au fost etichetate și sunt la 2062, 520 cm⁻¹ și, respectiv, 859 cm⁻¹ și au fost detectate și impuritățile: CS₂ (1530 cm⁻¹) CO₂ (2350 cm⁻¹).

BIBLIOGRAFIE

- [1] Masetti M., Krishnamurthi A. (2009). „JWST Science”. NASA.
- [2] <https://edu.rsc.org/resources/infrared-ir-spectroscopy-more-complicated-molecules/4010246.article>
- [3] https://scilearn.sydney.edu.au/fychemistry/chem2401/tutorial_ws4.pdf
- [4] <https://webbook.nist.gov/cgi/cbook.cgi?ID=C124389&Type=IR-SPEC&Index=1#IR-SPEC>
- [5] <https://webbtelescope.org/contents/news-releases/2022/news-2022-060>
- [6] <https://webbtelescope.org/contents/news-releases/2022/news-2022-060>

ROLUL CBCT ÎN CREȘTEREA PRECIZIEI TRATAMENTULUI LA BORDUL ACCELERATORULUI LINIAR

Mihaela Roxana GOILEAN¹, Loredana MARCU²

¹Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe, student anul I Fizica Explorărilor și Terapiilor Biomedicale, Oradea, România

²Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe, Departamentul de Fizică

Rezumat: *Lucrarea prezintă importanța unui CBCT (Cone Beam Computed Tomography) în imagistica medicală. Aparatul CBCT utilizează o rază conică de radiații, care permite captarea de imagini tridimensionale de înaltă rezoluție ale structurilor osoase și dentare cu o doză redusă de radiații.*

Cuvinte cheie: *CBCT, LINAC, imagistică medicală, radioterapie.*

INTRODUCERE

Acceleratorul liniar (LINAC) este un dispozitiv medical utilizat pe scară largă în radioterapie, o componentă crucială în tratamentul cancerului. Funcția sa principală constă în generarea de fascicule concentrate de radiații de mare energie, fie sub formă de raze X, fie de electroni, care sunt direcționate cu precizie către tumora pacientului. [1]

Tomografia computerizată cu fascicul conic (CBCT) este o tehnică imagistică 3D la bordul acceleratorului liniar, care oferă informații detaliate despre anatomia pacientului, inclusiv oase, tumori și țesuturi moi. Imaginile CBCT achiziționate înainte de fiecare sesiune de tratament sunt comparate cu imaginile furnizate de CT-SIM (simulatorul CT) pe baza cărora s-a identificat volumul țintă și s-a realizat planul inițial de tratament. Această informație este esențială pentru administrarea precisă a radioterapiei cu fascicul extern, deoarece permite poziționarea cu acuratețe a pacientului pe patul de tratament înainte de fiecare doză de radiație, asistând cu rectificarea posibilelor erori de poziționare respectiv de mișcare a organelor vizate.[2]

MATERIALE SI METODE

Componentele principale ale unui accelerator liniar medical (CLINAC) sunt: [3]

- sursa de putere
- modulatorul
- clistronul (sau magnetronul)
- ghidul de undă
- tunul de electroni
- tubul de accelerare
- capul de tratament cuprinde:
 - ținta de raze X
 - folia de împrăștiere
 - filtrul de netezire (aplatizare) al fasciculului
 - camera de ionizare
 - sistemul de colimare
 - sistem luminos de localizare

Acceleratoarele clinice moderne permit atât tratamentul cu fotoni (mod fotonic), cât și tratamentul cu electroni (mod electronic).

Când electronii lovesc o țintă (de obicei realizată dintr-un material cu număr atomic mare, cum ar fi wolframul), se produce radiația bremsstrahlung. În acest mod, fasciculul de electroni este transformat într-un spectru fonic cu energia maximă egală cu energia electronilor incidenți și energia medie egală cu o treime din valoarea maximă a energiei. [4]

Schema funcționării unui accelerator liniar:

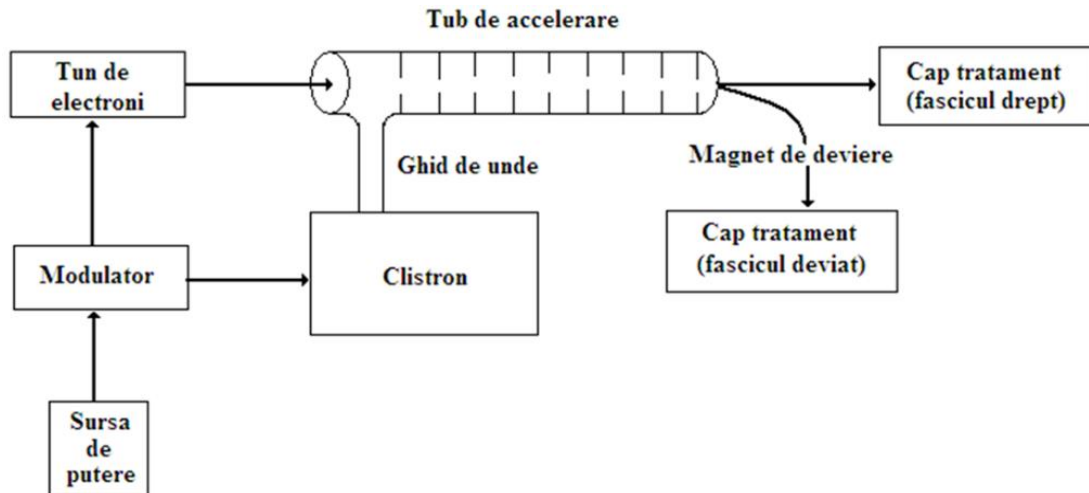


Figura 1. Schema funcționării unui linac [3]

Acceleratorul liniar funcționează pe baza principiilor

fizicii nucleare și a electricității:

1. Accelerarea particulelor:

Acceleratorul liniar utilizează unde electromagnetice pentru a accelera electronii la viteze foarte mari (aproape de viteza luminii). Electronii sunt eliberați dintr-o sursă și accelerați de-a lungul unui tub drept, folosind o serie de câmpuri electromagnetice oscilante.

2. Producerea razelor X:

Electronii accelerați se lovesc de un target (țintă) din material dens, de obicei tungsten, iar în urma impactului se generează raze X de înaltă energie.

În anumite cazuri, electronii pot fi utilizați direct (terapie cu fascicul de electroni) pentru tratarea cancerului care este mai aproape de suprafața pielii.

3. Formarea fasciculului:

Radiația generată este formată într-un fascicul și este modelată cu ajutorul unor sisteme avansate, cum ar fi colimatoarele multi-lamelare (MLC - Multi-Leaf Collimators), care reglează dimensiunea și forma fasciculului pentru a se potrivi exact cu dimensiunea și forma tumorii.

4. Livrarea radiațiilor către pacient:

Fasciculul de radiație este direcționat către zona afectată de cancer, rotindu-se în jurul pacientului pentru a aplica doza de tratament din unghiuri multiple. Aceasta permite concentrarea dozei maxime asupra tumorii și minimizarea efectelor secundare asupra țesuturilor sănătoase din jur. [5]

REZULTATE ȘI DISCUȚII

Obținerea unei imagini CBCT (Tomografie Computerizată cu Fascicul Conic) presupune un proces specific în care un fascicul conic de raze X este utilizat pentru a capta imagini din diferite unghiuri, iar un software de reconstrucție le transformă într-o imagine tridimensională.

1. Poziționarea pacientului

Pacientul este plasat fie în picioare, fie întins pe un pat, în funcție de tipul aparatului CBCT. Capul sau partea corpului care urmează să fie scanată este fixată pentru a preveni mișcările. Poziționarea corectă este importantă pentru a asigura o scanare precisă și clară.

2. Emiterea razelor X

Aparatul CBCT emite un fascicul conic de raze X care trece prin corpul pacientului. Spre deosebire de scanările CT convenționale, care folosesc un fascicul în formă de ventilator (rază colimată), fasciculul CBCT este conic și poate captura mai multe secțiuni ale obiectului scanat într-o singură rotație.



Figura 2. Pacient pregătit pentru o scanare CBCT [2]

3. Rotirea în jurul pacientului

Dispozitivul CBCT efectuează o rotație completă sau parțială în jurul pacientului (de obicei 180° sau 360°), timp în care sunt realizate multiple imagini bidimensionale din diferite unghiuri (până la câteva sute de proiecții). Aceste imagini sunt captate de un detector digital.

4. Reconstrucția imaginii tridimensionale

După ce rotația este completă și toate imaginile 2D sunt colectate, un software specializat procesează datele și reconstruiește o imagine tridimensională (3D) a zonei scanate. Această reconstrucție permite vizualizarea detaliată a structurilor osoase, dentare și a țesuturilor moi din mai multe perspective.

5. Vizualizarea și interpretarea imaginii

Imaginea 3D obținută este analizată de medici radiologi sau de specialiști, care pot inspecta zonele de interes din diverse unghiuri și straturi, folosind planuri axiale, coronale sau sagitale, ceea ce oferă o vedere detaliată și completă a anatomiei pacientului. [1]



Figura 3. Imagine realizată cu un CBCT [2]

Acceleratorul liniar poate fi utilizat în diverse tehnici avansate de radioterapie:

Radioterapie cu intensitate modulată (IMRT):

Permite ajustarea intensității fasciculului de radiații în diferite părți ale câmpului de tratament, ceea ce ajută la livrarea unei doze mai mari de radiații către tumoare și protejarea țesuturilor sănătoase.

Radioterapie ghidată imagistic (IGRT):

Include utilizarea imagisticii medicale (CT, RMN sau raze X) pentru a ajusta poziția pacientului în timp real, asigurând că fasciculul este direcționat exact către tumoare la fiecare sesiune de tratament.

Radioterapie stereotactică (SRS/SBRT):

Se utilizează pentru tratamente foarte precise, în special pentru tumori mici și localizate. Oferă doze mari de radiații pe o zonă mică, fiind adesea utilizată pentru tratarea metastazelor cerebrale sau a altor tumori mici localizate în alte părți ale corpului.

Terapie cu fascicul de electroni:

Aceasta este utilizată pentru tratarea tumorilor de suprafață sau a celor situate aproape de piele, deoarece electronii nu pătrund foarte adânc în țesuturi. [6]

Rezultate privind importanța CBCT la bordul acceleratorului liniar:

1. Creșterea preciziei tratamentului prin radioterapie

Utilizarea CBCT la bordul acceleratorului liniar permite obținerea unor imagini tridimensionale în timp real ale tumorii și ale structurilor înconjurătoare. Aceasta ajută la o localizare extrem de precisă a țintei înainte de fiecare sesiune de tratament. Studii clinice au demonstrat că introducerea CBCT în radioterapie ghidată imagistic (IGRT) a redus erorile de poziționare ale pacientului și a îmbunătățit livrarea dozei către tumoare cu până la 50% în comparație cu metodele tradiționale de radioterapie.

2. Adaptarea planului de tratament pe parcursul radioterapiei

CBCT permite monitorizarea continuă a dimensiunii și formei tumorii pe măsură ce tratamentul avansează. Acest lucru facilitează radioterapia adaptivă (ART - Adaptive Radiation Therapy), unde planul de tratament este modificat pe baza schimbărilor anatomice observate în timp real. Studiile au arătat că utilizarea CBCT pentru ART poate îmbunătăți controlul tumoral și reduce riscul de deteriorare a țesuturilor sănătoase.

3. Reducerea efectelor secundare și complicațiilor

Implementarea CBCT în radioterapie a dus la scăderea incidenței efectelor secundare asociate cu iradierea neintenționată a țesuturilor sănătoase. În radioterapia convențională, pacienții pot experimenta efecte adverse din cauza suprapunerii radiațiilor pe organe critice, cum ar fi măduva spinării, plămânii sau intestinele. Studiile au arătat că utilizarea CBCT reduce cu aproximativ 30% incidența acestor complicații.

4. Îmbunătățirea eficienței radioterapiei stereotactice

CBCT este esențial în tratamentele stereotactice (SRS/SBRT), unde tumora este iradiată cu doze mari de radiație în puține sesiuni. Tumorile mici sau localizate în zone greu accesibile, cum ar fi creierul, plămânii sau ficatul, necesită o precizie extrem de ridicată în livrarea radiațiilor. Studiile au arătat că utilizarea CBCT la bordul acceleratorului liniar poate reduce eroarea de localizare sub 1 mm, ceea ce este crucial în acest tip de tratament de înaltă precizie.

5. Monitorizarea poziției pacientului în timp real

CBCT integrat în acceleratorul liniar permite monitorizarea și corectarea mișcărilor pacientului în timp real, un aspect esențial în tratamentele pe zone anatomice sensibile, cum ar fi regiunea capului și gâtului sau toracele. Corectarea acestor mici mișcări (cum ar fi respirația sau înghițirea) poate reduce erorile în livrarea dozei de radiații și îmbunătăți rezultatele clinice.[7]

CONCLUZII

Tehnica de imagistică CBCT este utilă în decursul tratamentului pentru ajustarea corectă a poziției pacientului.

CBCT furnizează imagini tridimensionale în timp real, ceea ce facilitează adaptarea planului de tratament în funcție de modificările fiziologice ale pacientului sau de evoluția tumorii. Aceasta crește eficiența radioterapiei, reducând necesitatea de ajustări repetate sau replanificări pe parcursul tratamentului.

CBCT oferă o imagine clară a organelor critice adiacente tumorii, cum ar fi plămânii, măduva spinării sau organele pelvine, permițând radioterapeuților să monitorizeze constant mișcările acestora (datorate respirației sau altor procese fiziologice) și să ajusteze fasciculul de radiație pentru a evita iradierea neintenționată a acestor structuri.

CBCT permite adaptarea dinamică și individualizată a tratamentului, îmbunătățind ratele de succes și reducând riscurile asociate.

BIBLIOGRAFIE

- [1] <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/>
- [2] <https://www.radiologyinfo.org/en/info/linac>
- [3] Curs - Metode radiologice de tratament – prof. univ. dr. Marcu Loredana
- [4] <https://www.moffitt.org/treatments/radiation-therapy/linear-accelerator-linac/>
- [5] <https://www.fda.gov/radiation-emitting-products/medical>
- [6] <https://www.bristolmed.ro/Informatii-utile/Tehnologia-CBCT/>
- [7] <https://dentafilm.ro/tomografia-computerizata-cbct-ct-3d/>

APLICAȚII ALE TRANSFERULUI DE CĂLDURĂ PRIN RADIAȚIE

Mircea-Alexandru HARTMANN¹, Cristian-Dorin HOREA²

¹Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe, student anul I Fizica Explorărilor și Terapiilor Biomedicale

²Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe, Departamentul de Fizică

Rezumat: În cazul transferului de căldură prin radiație, căldura este transferată de la un corp la altul, de la o temperatură mai mare la o temperatură mai mică, corpurile fiind separate în spațiu [6]. Fenomenul are loc sub formă de unde și intervine la diferențe mari de temperatură. Un colector solar absoarbe energia radiantă de la o sursă de lumină și poate încălzi apa. Încălzirea colectorului solar este demonstrată prin măsurarea temperaturii plăcii absorbante. Se determină apoi creșterea temperaturii apei care curge prin tubul spiralat de cupru al colectorului. Se va observa că încălzirea apei este dependentă de debitul ei.

Cuvinte cheie: transfer de căldură, colector solar, radiație, element absorbant, încălzirea apei

INTRODUCERE

Transformarea căldurii în energie radiantă și invers are loc printr-un fenomen complex de oscilație interatomică și intraatomică. Energia radiantă este transportată prin spațiu de radiațiile termice care se transformă parțial sau total în căldură[atunci când acestea întâlnesc un corp mai rece.

Un panou solar este un dispozitiv modern care folosește radiația solară în vederea producerii altor resurse. Panourile solare sunt fabricate din materiale speciale, care absorb căldura și lumina Soarelui prin celulele care intră în componența lor. Celulele transformă căldura și lumina, pe care le eliberează ulterior sub formă de energie. Comparativ cu alți combustibili, energia solară este inepuizabilă, regenerabilă și nepoluantă. Există mai multe tipuri de panouri solare: cele care convertesc energia solară în căldură și poartă numele de panou solar termic (denumit și colector solar sau captator solar) și cele care convertesc energia solară în electricitate și poartă denumirea de panou solar fotovoltaic [3].

Rezumându-ne la cazul colectorului solar, deoarece aproape întreg spectrul radiației solare este utilizat pentru producerea de energie termică, randamentul acestui colector este ridicat, fiind în jur de 60 % - 75 % raportat la energia razelor solare incidente (200 - 1000 W/m² în Europa, în funcție de latitudine, anotimp și vreme). Din punct de vedere funcțional, componenta principală a colectorului solar este elementul absorbant al radiației care transformă energia razelor solare în energie termică și o cedează unui agent termic. Cu ajutorul acestui agent termic, energia este preluată de la colector și este fie stocată, fie utilizată direct (ex. apă caldă de consum).

MATERIALE ȘI METODE

Aparatura prezentată în lucrare este realizată de către firma PHYWE din Germania și se află în dotarea Laboratorului de Fizică moleculară și căldură al Departamentului de Fizică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea.

Pentru inițializarea experimentului, se assemblează colectorul solar: tubul de cupru se fixează între șuruburi, peste care se fixează placa transparentă. Acesta se fixează în partea dreaptă a tablei magnetice. Se fixează vasul de scurgere cât mai sus în partea stângă a tablei și se atașează acestui vas un tub de silicon de aprox. 50 cm și se închide capătul liber cu o clamă. Se umple vasul de scurgere cu aproximativ 1 litru de apă și se scot bulele de aer apoi se conectează tubul de silicon la colectorul solar. La capătul de evacuare al colectorului se atașează un mic tub de silicon de aproximativ 5 cm și se pune un vas de 600 ml pe un suport magnetic astfel încât apa care iese din colectorul solar să curgă în acest vas.

Se deschide temporar clama atât cât să se umple colectorul solar. Se fixează lampa de iluminat astfel încât colectorul să fie iluminat omogen și se fixează cele două termometre pe tabla magnetică [2].

În prima parte a efectuării măsurătorilor, se încălzește colectorul solar cu apă în stare statică. Se introduce una din sondele termometrice în vasul de scurgere a apei și una în mufa colectorului, în timp ce clama de pe tub se menține închisă (figura 1).

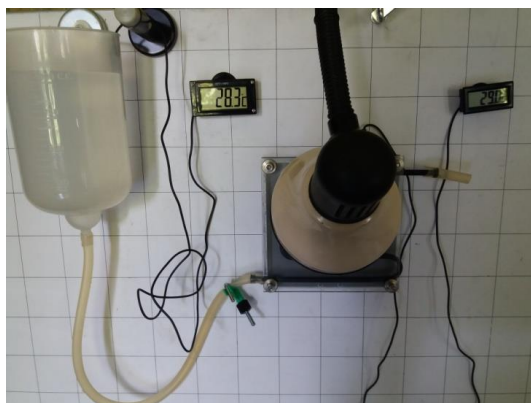


Figura 1. Realizarea experimentului. Încălzirea colectorului solar cu apă în stare statică

Se citesc temperaturile inițiale: θ_1 a apei din vasul de scurgere și θ_A a plăcii absorbante a colectorului. Se pornește cronometrul și se aprinde lampa, citindu-se temperaturile apei din vasul de scurgere și a plăcii absorbante a colectorului, din minut în minut, până la 10 minute. Datele colectate se regăsesc în tabelul 1.

Pentru partea a doua - încălzirea colectorului solar cu apă în stare dinamică - se umple vasul de scurgere până la un nivel aflat cu aproximativ 10 cm mai sus decât colectorul solar. Se poziționează tubul scurt de la capătul colectorului solar astfel încât apa să se scurgă în paharul Berzelius.

Se fixează sondele termometrelor ca în figura 2 (una din sonde se introduce aproximativ 1 cm în tubul scurt) și se deschide clama care bloca curgerea apei prin tub astfel încât apa să poată să picure destul de rapid în paharul Berzelius (aproximativ 3 picături pe secundă). Temperaturile sunt dependente de viteza de scurgere a apei prin picături, de aceea trebuie ajustată clama care strânge tubul de silicon, menținându-se astfel viteza constantă [2].



Figura 2. Realizarea experimentului. Încălzirea colectorului solar cu apă în stare dinamică

Se măsoară temperaturile θ_A a plăcii absorbante a colectorului θ_2 a apei care picură, minut cu minut, până când temperaturile se egalizează (aproximativ între 5 și 10 minute). Datele colectate se regăsesc în tabelul 2.

Pentru a determina debitul de curgere a apei se plasează un vas de 100 ml sub tubul scurt și se măsoară timpul Δt necesar pentru a se scurge un volum ΔV de apă (40, 60, respectiv 80 ml) și apoi se va calcula o media a acestor trei măsurători. Rezultatele sunt date în tab. 3.

REZULTATE ȘI DISCUȚII

Tabelul 1. Temperaturile plăcii absorbante a colectorului (θ_A) și apei din vasul de scurgere (θ_1)

t (min)	$\theta_A(^{\circ}\text{C})$	$\theta_1(^{\circ}\text{C})$
0	29	28.3
1	30.2	28.4
2	31.6	28.5
3	33.3	28.5
4	34.5	28.5
5	35.9	28.6
6	37.4	28.6
7	38.9	28.6
8	40.4	28.7
9	41.8	28.7
10	43.2	28.7

Tabelul 2. Temperaturile plăcii absorbante a colectorului (θ_A) și apei care picură (θ_2)

t (min)	$\theta_A(^{\circ}\text{C})$	$\theta_2(^{\circ}\text{C})$
11	44.4	44.2
12	43.8	36.7
13	42.8	34.6
14	41.9	34.3
15	41.3	34.2
16	41	34.2
17	40.8	34.3
18	40.7	34.4
19	40.8	34.6
20	40.8	34.6

Tabelul 3. Calculul debitului apei

ΔV (ml)	Δt (s)	$\frac{\Delta V}{\Delta t} \left(\frac{\text{ml}}{\text{s}} \right)$	$\overline{\frac{\Delta V}{\Delta t}} \left(\frac{\text{ml}}{\text{s}} \right)$
20	79	0.253	0.256
40	156	0.256	
60	232	0.258	

Prima parte a experimentului arată că temperatura colectorului solar crește când acesta este iluminat. Rata de creștere a temperaturii încetinește după câteva minute deoarece pierderile de căldură ale colectorului cresc.

Temperatura vasului de scurgere rămâne aproape constantă, de aceea valoarea sa poate fi utilizată la calculele aferente părții a doua a experimentului. În partea a doua a experimentului căldura este absorbită de apa în curgere, în timp ce colectorul solar are o temperatură cu până la 7 grade mai mare decât a apei care iese din tubul acestuia. După câteva minute se obține o stare staționară, toate cele trei temperaturi (ale vasului de scurgere, ale colectorului și ale apei care iese din colector) rămân constante. Temperaturile plăcii absorbante a colectorului (θ_A) și apei care picură (θ_2) sunt dependente de debitul de curgere al apei.

Căldura absorbită de colector este folosită pentru încălzirea sa dar și a apei care trece prin acesta. Pentru a calcula valoarea acesteia, folosim formula:

$$Q = \Delta m \cdot c(\theta_2 - \theta_1) \quad (1)$$

unde $c = 4180 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ este căldura specifică a apei, iar $\theta_2 - \theta_1$ este diferența temperaturilor apei care curge din colector și a celei din vasul de scurgere. Aceste temperaturi sunt valorile corespunzătoare ultimelor linii din tab.1 și tab.2 (când diferența de temperatură s-a stabilizat).

Masa Δm care curge prin colector în intervalul Δt se poate calcula folosind densitatea apei ρ :

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (2)$$

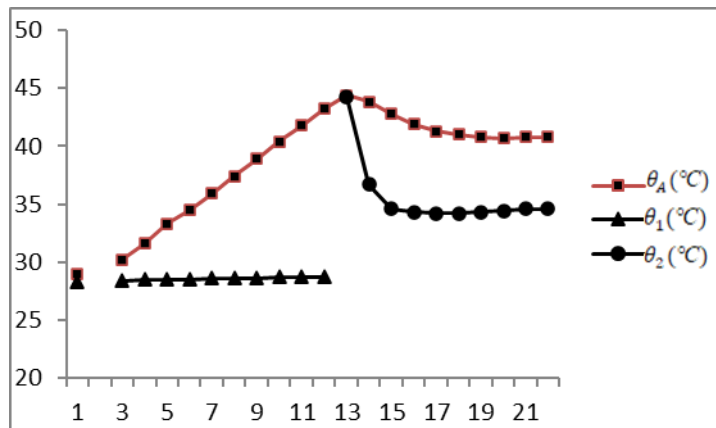


Figura 3. Reprezentarea grafică a temperaturii plăcii absorbante a colectoarei (θ_A), a apei din vasul de scurgere (θ_1) și a apei care picură (θ_2) în funcție de timp

Puterea (căldura Q acumulată în colector în unitatea de timp) se va calcula, folosind debitul mediu calculat în tabelul 3, cu formula:

$$P = c\rho \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} (\theta_2 - \theta_1) \quad (3)$$

Cu aceste valori puterea este: $P = 6,31 \text{ W}$.

CONCLUZII

Aparatura experimentală a constatat, în principal, dintr-un colector solar care se încălzește de la o sursă de radiație luminoasă artificială, dar care simulează un colector al radiației solare. Astfel, un tub metalic străbate suprafața acestuia și colectează energia termică a radiației luminoase, ducând la încălzirea apei în două cazuri: static și dinamic.

În cazul static, temperatura colectorului crește liniar în timp, la expunerea la radiația luminoasă. În cazul dinamic, apa încălzită în colector este folosită, ceea ce duce inițial la scăderea temperaturii colectorului și a apei ce trece prin colector, apoi această temperatură va deveni staționară.

Calculul puterii colectorului solar se face în funcție de debitul de curgere al apei prin acesta. Cu cât este mai mare debitul, cu atât scade diferența de temperatură. Acest fapt se poate determina experimental dacă se repetă experimentul la un debit diferit.

BIBLIOGRAFIE

- [1] *** (1988), *Compendiu de fizică*, Editura Științifică și Enciclopedică, București,
- [2] *** (2003), *Demonstration Experiments in Physics*, Thermodynamics on the Magnetic Board Phywe Series of publications, Phywe Systeme Gmbh, Gottingen.
- [3] Anghel S. (2010), *Fenomene termice*, Editura Universității din Pitești
- [4] Crețu T. (1986). *Fizica generală*, Editura Tehnică, București
- [5] Georgesc, V, Sorohan, M. (1996), *Fizică moleculară*, Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" Iași
- [6] Plăviț, C.N. (1994). *Fizica fenomenelor termice*, Editura Hyperion XXI

UTILIZAREA IMAGISTICII PRIN REZONANȚĂ MAGNETICĂ ÎN DETECTAREA PATOLOGILOR NEURODEGENERATIVE

Mircea-Alexandru HARTMANN¹, Adina-Monica TODERAȘ², Alexandru TODERAȘ³, Iuliu-Cristian DRAGOMIR⁴

¹Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe, student anul I Fizica Explorărilor și Terapiilor Biomedicale

²Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe, Departamentul de Fizică

³Liceul Tehnologic Felix, Sânmartin, profesor

⁴Inspectoratul Județean Bihor, profesor

Rezumat: *Secvențele RMN (ponderate T1, T2, FLAIR și cu gadoliniu) sunt esențiale pentru detectarea atrofiei cerebrale și a leziunilor demielinizate în bolile neurodegenerative și inflamatorii. Ele facilitează diagnosticarea precoce și oferă detalii importante despre evoluția bolii, sprijinind astfel tratamentele personalizate și monitorizarea eficientă a pacienților.*

Cuvinte cheie: *RMN, atrofie cerebrală, focare demielinizate, FLAIR*

INTRODUCERE

Rezonanța Magnetică Nucleară (RMN) este o tehnică avansată de imagistică medicală utilizată pentru a obține imagini de înaltă rezoluție ale structurilor interne ale organismului uman. Spre deosebire de alte metode imagistice, precum tomografia computerizată (CT) sau radiografia, RMN-ul nu implică utilizarea radiațiilor ionizante, ci se bazează pe interacțiunea dintre un câmp magnetic puternic și protonii din moleculele de apă din organism.

Aceasta face ca RMN-ul să fie o metodă de diagnostic sigură și neinvazivă, ideală pentru examinarea țesuturilor moi, cum ar fi creierul, măduva spinării, mușchii și organele interne. RMN-ul este utilizat pe scară largă în neurologie, cardiologie, ortopedie și oncologie datorită capacității sale de a oferi imagini detaliate și precise ale structurilor patologice.

Noțiuni teoretice

Câmpul magnetic reprezintă un element esențial în funcționarea RMN-ului. Magnetul principal al aparatului RMN generează un câmp magnetic puternic, de obicei cu o intensitate de 1,5 sau 3 Tesla, capabil să alinieze protonii din nucleele atomilor de hidrogen. Această aliniere este crucială pentru obținerea unui semnal RMN.

În practică, câmpul magnetic este uniform și stabil, iar variațiile acestuia sunt controlate cu ajutorul bobinelor de gradient, care modulează câmpul pentru a permite localizarea precisă a semnalului din diferite părți ale corpului. Un câmp magnetic de înaltă intensitate îmbunătățește rezoluția și claritatea imaginii RMN, motiv pentru care aparatele de 7 Tesla și peste sunt folosite pentru aplicații de cercetare și imagistică avansată.

Frecvența Larmor este o componentă teoretică centrală a RMN-ului. Aceasta descrie frecvența la care protonii precesionează în jurul liniei câmpului magnetic extern aplicat. Această frecvență este specifică fiecărui tip de nucleu și depinde de intensitatea câmpului magnetic și de raportul giromagnetic, un parametru care caracterizează comportamentul magnetic al nucleelor atomice.

Ecuatia care descrie frecvența Larmor este:

$$\omega_0 = \gamma B_0$$

unde:

- ω_0 este frecvența Larmor,
- γ este raportul giromagnetic,
- B_0 este intensitatea câmpului magnetic.

Această frecvență definește la ce frecvență trebuie să fie aplicate undele radio pentru a excita protonii și a genera semnalul RMN.

Practic, frecvența Larmor joacă un rol crucial în selectivitatea și acuratețea imagisticii, permițând diferențierea clară între diverse țesuturi în funcție de răspunsul lor la câmpul magnetic și la excitația cu unde radio.

Izotopul	Spinul (I)	Abundența naturală (%)	Rata magnetogirică $\gamma(\text{rad/sT})$
^1H	1/2	~100	2.675×10^8
^2H	1	0.015	0.41×10^8
^{12}C	0	98.9	0
^{13}C	1/2	1.1	0.673×10^8
^{14}N	1	99.6	0.193×10^8
^{15}N	1/2	0.37	-0.271×10^8
^{16}O	0	~100	0
^{17}O	5/2	0.04	-0.362×10^8
^{19}F	1/2	~100	0.252×10^8
^{23}Na	3/2	~100	0.708×10^8
^{29}Si	1/2	4.7	-0.532×10^8
^{31}P	1/2	~100	0.697×10^8
^{63}Cu	3/2	69.17	0.711×10^8
^{65}Cu	3/2	30.83	0.760×10^8
^{129}Xe	1/2	24.4	-0.745×10^8

Figura 1 Tabel cu spinul posedat de fiecare nucleu și rata giromagnetică

Precesia reprezintă un fenomen fizic esențial în teoria și aplicarea rezonanței magnetice nucleare (RMN). Acesta descrie mișcarea axei de rotație a unui proton sau a unui alt nucleu cu moment magnetic în jurul direcției unui câmp magnetic extern aplicat, care, în RMN, este un câmp magnetic static, puternic și uniform.

În mod natural, protonii din nucleul de hidrogen au un moment magnetic asociat cu spinul lor, ceea ce îi face să se comporte ca niște mici magneți. În absența unui câmp magnetic extern, acești mici magneți sunt orientați aleatoriu. Atunci când un câmp magnetic puternic (B_0) este aplicat, protonii se aliniază fie paralel, fie antiparalel cu direcția câmpului, deoarece există două stări energetice posibile pentru protoni în prezența unui câmp magnetic: starea de energie joasă (paralelă cu câmpul) și starea de energie înaltă (antiparalelă cu câmpul). Axa de rotație a protonilor nu rămâne însă fixă în câmpul magnetic, ci descrie o mișcare conică în jurul direcției câmpului magnetic. Această mișcare, numită precesie, este similară mișcării unui titirez sau a unui giroscop în jurul unei axe. Viteza cu care protonii precesionează în jurul câmpului magnetic este determinată de frecvența Larmor.

Când protonii se aliniază cu câmpul magnetic extern, aceștia se află în starea de energie joasă. Dacă se aplică un impuls de unde radio (radiofrecvență sau RF) la frecvența Larmor, protonii vor absorbi această energie, iar unii dintre ei vor trece din starea de energie joasă în starea de energie înaltă (antiparalelă cu câmpul magnetic). Aceasta este faza de **excitație** a procesului RMN.

Excitația protonilor are ca rezultat o schimbare în orientarea lor. Axa de rotație a protonilor este deviată de la alinierea inițială cu câmpul magnetic extern, formând un unghi cu direcția câmpului, de obicei 90° sau 180° , în funcție de secvența RMN utilizată. În această stare excitată, protonii continuă să precesioneze, dar acum nu mai sunt aliniați complet cu câmpul magnetic static.

După întreruperea impulsului de radiofrecvență, protonii tind să revină la starea de echilibru, aliniindu-se din nou cu câmpul magnetic extern. Acest proces de revenire la starea inițială poartă numele de **relaxare** și se desfășoară în două faze distincte:

1. **Relaxarea longitudinală (T1):** În timpul acestei faze, componentele momentului magnetic al protonilor revin la orientarea paralelă cu câmpul magnetic extern (B_0), restabilind magnetizarea longitudinală. Timpul de relaxare T1 variază în funcție de tipul de țesut și este un parametru important în imagistica RMN ponderată T1.
2. **Relaxarea transversală (T2):** Magnetizarea transversală, adică mișcarea de precesie a protonilor în plan perpendicular pe câmpul magnetic extern, dispare treptat în această fază. Aceasta se datorează de-fazării spinurilor protonilor, care determină scăderea semnalului detectabil. Timpul de relaxare T2 variază, de asemenea, în funcție de țesut și este utilizat pentru a genera imagini ponderate T2.

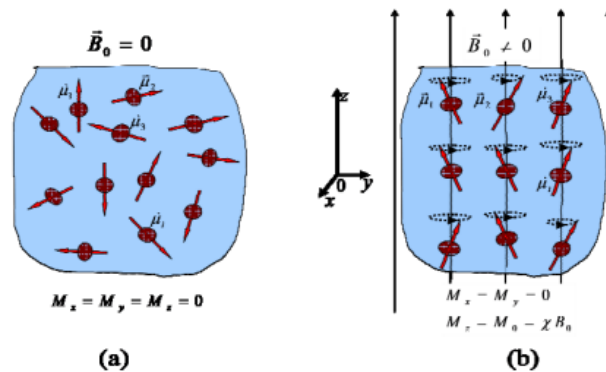


Figura 2. Orientarea momentelor magnetice în absența unui câmp magnetic extern (a) și în prezența acestuia (b).
Direcția câmpului magnetic aplicat determină direcția Oz în rezonanța magnetică nucleară

În timpul procesului de relaxare, protonii eliberează energia absorbită sub formă de unde electromagnetice. Această energie este captată de bobinele de recepție ale aparatului RMN sub formă de **semnale electromagnetice**. Aceste semnale sunt ulterior procesate pentru a obține informații despre structurile din interiorul corpului.

În imagistica medicală, diferențele în ratele de relaxare T1 și T2 între diverse țesuturi permit distingerea substanței albe de cea cenușie, vizualizarea leziunilor sau tumorilor și evaluarea structurilor patologice. De exemplu:

- **Substanța albă** și **substanța cenușie** au timpi de relaxare T1 și T2 diferiți, ceea ce face ca ele să apară diferit în imagini RMN ponderate T1 sau T2.
- **Leziunile demielinizante**, caracteristice sclerozei multiple, apar mai clar în imagini ponderate T2, deoarece timpul de relaxare T2 al zonei afectate este mai lung decât al țesuturilor sănătoase.

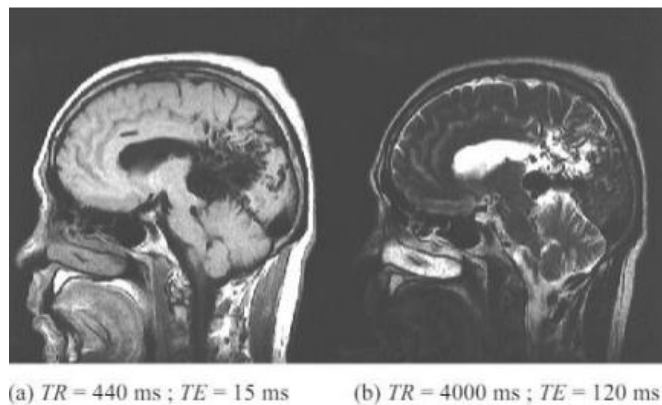


Figura 3. Efectul relaxării T1 și T2 asupra contrastului unei imagini RMN

Transformata Fourier este un instrument matematic fundamental utilizat în procesarea semnalului RMN. Acest algoritm transformă semnalele electromagnetice colectate (în domeniul timpului) în frecvențe care pot fi ulterior analizate pentru a obține imagini detaliate ale structurilor interne.

Prin utilizarea transformatei Fourier, datele brute din semnalele RMN sunt convertite în imagini bidimensionale sau tridimensionale care permit vizualizarea exactă a anatomiei și eventualelor patologii. În contextul RMN-ului, acest proces de reconstrucție este esențial pentru a transforma semnalele de amplitudine scăzută în imagini clinice de înaltă rezoluție.

Formula transformatei Fourier:

$$S(k_x, k_y) = \iint \rho(x, y) e^{-\frac{t_E}{T_2(x, y)}} e^{i2\pi(k_x x + k_y y)} dx dy$$

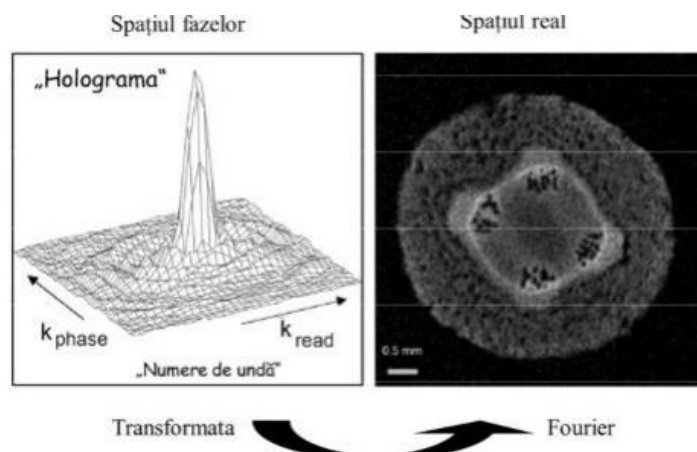


Figura 4. Secțiunea prin tulpina unei plante obținută cu o secvență de pulsuri

Acum că avem niște noțiuni teoretice fundamentale despre imagistica prin rezonanță magnetică, ne putem direcționa atenția la a înțelege patologiile neurodegenerative pe care le putem investiga cu ajutorul RMN-ului.

Atrofia cerebrală este procesul de reducere a volumului cerebral, cauzată de moartea neuronilor și a conexiunilor sinaptice. Aceasta duce la pierderea progresivă a masei cerebrale, afectând atât substanța cenușie, care conține corpul celulelor neuronale, cât și substanța albă, care conține fibrele de mielină. Atrofia poate apărea în orice regiune a creierului, iar severitatea ei este corelată cu simptomatologia clinică, precum deteriorarea funcțiilor cognitive, tulburările de memorie și dificultățile de coordonare.

În boli neurodegenerative, cum ar fi boala Alzheimer, atrofia este predominantă în regiuni precum hipocampusul și cortexul temporal, zone implicate în memorie și orientare. Pierderea neuronilor din aceste zone este unul dintre factorii principali care contribuie la declinul cognitiv.

Demielinizarea este procesul prin care mielina, învelișul protector care izolează axonii neuronilor, este deteriorată sau distrusă. Mielina joacă un rol esențial în conducerea rapidă și eficientă a impulsurilor electrice între neuroni. În absența mielinei, semnalele nervoase devin mai lente sau se pierd complet, ducând la disfuncții neurologice variate, în funcție de localizarea focarelor demielinizate.

Scleroza multiplă este cea mai frecventă boală în care apar focare demielinizate. Aceasta este o boală autoimună în care sistemul imunitar atacă mielina din creier și măduva spinării, ducând la formarea unor leziuni în substanța albă a sistemului nervos central.

Impactul clinic al acestor afecțiuni:

Atrofia cerebrală duce la pierderi cognitive, tulburări de memorie, dificultăți de coordonare motorie și schimbări de personalitate, fiind asociată cu boli precum demența și SLA. Focarele demielinizate cauzează simptome diverse, în funcție de localizare, inclusiv slăbiciune musculară, tulburări de vedere, dificultăți de vorbire și paretezii. În scleroza multiplă, aceste focare pot fluctua în intensitate, iar evoluția lor este monitorizată pentru a evalua progresia bolii. Atât atrofia cerebrală, cât și focarele demielinizate sunt procese patologice ce pot avea efecte devastatoare asupra funcționării creierului și sunt esențial de detectat precoce pentru a optimiza tratamentele și intervențiile terapeutice.

REZULTATE ȘI DISCUȚII

Detectarea atrofiei cerebrale și a focarelor demielinizate cu ajutorul imagisticii prin rezonanță magnetică nucleară (RMN) se bazează pe utilizarea unor secvențe specifice, fiecare cu propriile avantaje pentru evidențierea structurilor și proceselor patologice din creier.

Cele patru secvențe principale utilizate în acest context sunt: **T1-weighted imaging**, **T2-weighted imaging**, **FLAIR** (fluid-attenuated inversion recovery) și **imaginile T1 ponderate cu contrast de gadoliniu**. Fiecare dintre aceste tehnici furnizează informații complementare pentru evaluarea degenerării și a modificărilor patologice, esențiale în diagnosticul bolilor

neurodegenerative, cum ar fi scleroza multiplă, Alzheimer sau scleroza laterală amiotrofică.

T1-weighted Imaging (Imagistica ponderată T1)

Această secvență RMN este utilă în vizualizarea structurii și anatomiei creierului, oferind imagini clare ale conturului și volumului său. Este deosebit de eficientă în detectarea atrofiei cerebrale, care se caracterizează prin pierderea de volum a substanței cerebrale, cauzată de moartea neuronilor și a conexiunilor sinaptice.

În imaginile ponderate T1, substanța albă apare de culoare deschisă, în timp ce substanța cenușie este mai închisă la culoare. Atunci când apare atrofie, spațiile dintre structurile cerebrale, cum ar fi ventriculii și șanțurile cerebrale (sulci), devin mai vizibile datorită pierderii de volum.

Detectarea atrofiei se face prin evaluarea măsurătorilor volumetrice ale diferitelor regiuni cerebrale și compararea acestora cu valorile normale ale populației. În bolile neurodegenerative, cum ar fi boala Alzheimer, atrofia este cel mai vizibilă în regiunea hipocampusului, unde neuronii se pierd progresiv.

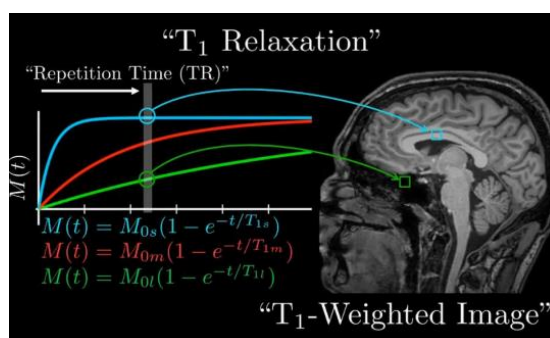


Figura 5. Diferența timpilor de relaxare longitudinali T1

T2-weighted Imaging (Imagistica ponderată T2)

Imaginile ponderate T2 sunt excelente pentru evidențierea modificărilor legate de acumularea de lichid și procesele inflamatorii din țesuturile creierului. Aceasta face secvența extrem de utilă în **detectarea focarelor demielinizate** și în identificarea **edemelor** și a **inflamației**. În cazul **sclerozei multiple**, **leziunile demielinizate** sunt zone în care mielina, învelișul protector al axonilor, este distrusă, ceea ce duce la perturbarea semnalelor nervoase. În imaginile T2, aceste leziuni apar ca **zone hiperintense** (de culoare mai deschisă) datorită acumulării de lichid în jurul axonilor afectați.

Leziunile demielinizate sunt mai ușor de detectat în **substanța albă** a creierului și măduvei spinării, unde mielina este predominantă. Acumularea de lichid interstițial în aceste zone reflectă răspunsul inflamator al organismului și afectarea axonilor.

FLAIR (Fluid-Attenuated Inversion Recovery)

Secvența FLAIR este o variantă a imagisticii ponderate T2, concepută pentru a elimina semnalul provenit din lichidul cefalorahidian (LCR), care în mod normal apare hiperintens pe imaginile T2. Prin eliminarea acestui semnal, FLAIR face mai evidente leziunile demielinizate din zonele adiacente ventriculilor cerebrali, o localizare tipică pentru scleroza multiplă.

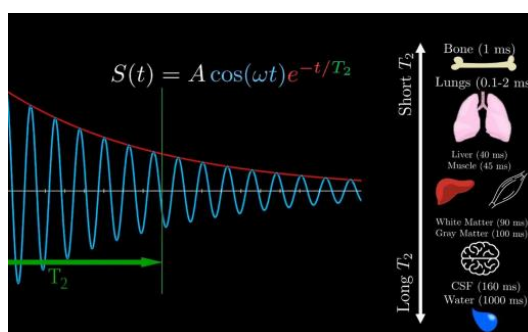


Figura 6. Timpul de relaxare transversal mediu T2

Detectarea focarelor demielinizate periventriculare: În scleroza multiplă, leziunile sunt frecvent localizate în apropierea ventriculilor. Secvența FLAIR este extrem de sensibilă la aceste focare, care apar ca **zone hiperintense** în apropierea ventriculilor, în contrast cu fondul întunecat al lichidului cefalorahidian.

FLAIR este utilă și pentru a detecta leziunile mai subtile, greu vizibile pe imaginile ponderate T2, și este deosebit de eficientă în **diagnosticul precoce al sclerozei multiple**, unde pot fi observate și mici focare în regiunile subcorticale.

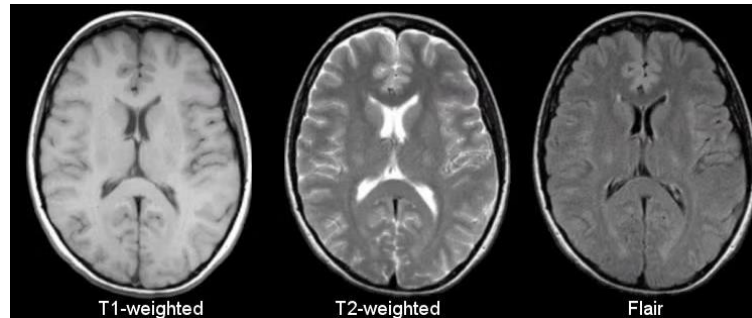


Figura 7. T1w vsT2w vs FLAIR

T1-weighted Imaging with Gadolinium Contrast (Imagistica ponderată T1 cu gadoliniu)

Această secvență implică utilizarea unui agent de contrast pe bază de **gadoliniu**, care este injectat intravenos pentru a îmbunătăți vizualizarea leziunilor active. Gadoliniul traversează **bariera hemato-encefalică** doar în locurile unde aceasta este compromisă, lucru caracteristic proceselor inflamatorii active.



Figura 8. T1W vs T1W Gad

Leziuni active în scleroza multiplă: Leziunile demielinizante active, care sunt asociate cu inflamația și distrugerea recentă a mielinei, se acumulează gadoliniu și apar ca **zone intensificate** pe imaginile T1. Aceasta permite medicilor să distingă între leziunile cronice (mai vechi) și cele active (noi).

Gadoliniul permite, de asemenea, evaluarea **proceselor inflamatorii acute** și identificarea zonei de activitate a bolii, fiind util în monitorizarea răspunsului la tratament și a evoluției bolii.

Integrarea acestor secvențe pentru diagnostic

Prin combinarea acestor secvențe, se poate obține o imagine completă asupra modificărilor structurale și funcționale din creier:

Atrofia cerebrală este mai bine evidențiată pe imaginile ponderate T1, unde pierderea de volum a creierului devine evidentă prin dilatarea ventriculilor și creșterea spațiilor dintre șanțurile cerebrale. Aceasta poate fi măsurată pentru a cuantifica gradul de degenerare neuronală.

Focarele demielinizate sunt mai clar vizibile pe imaginile ponderate T2 și FLAIR, unde apar ca zone hiperintense. Secvența T2 evidențiază leziunile datorită acumulării de lichid și inflamării, iar FLAIR elimină interferențele din LCR, oferind o imagine clară a focarelor periventriculare.

Leziunile active sunt detectate cu ajutorul imaginilor ponderate T1 cu gadoliniu, unde zonele afectate recent de procese inflamatorii apar cu un contrast crescut, indicând o barieră hemo-

encefalică compromisă.

CONCLUZII

Aceste secvențe RMN oferă medicilor instrumente precise pentru a detecta și monitoriza atrofia cerebrală și focarele demielinizate asociate cu afecțiuni neurodegenerative și inflamatorii. Imagistica ponderată T1 și T2 joacă un rol esențial în identificarea clară a structurii și compoziției creierului, relevând diferențele dintre țesutul sănătos și cel afectat.

În special, secvența FLAIR este extrem de utilă pentru vizualizarea leziunilor care ar putea fi mascate în imagistica convențională, în timp ce administrarea de gadolinu permite evidențierea leziunilor active, inflamatorii, prin contrast vascular. Această combinație de secvențe nu doar că îmbunătățește precizia diagnosticării precoce, dar și contribuie la o înțelegere mai profundă a evoluției bolii în timp real, oferind astfel un ghid valoros pentru tratamente personalizate, ajustate în funcție de progresia bolii fiecărui pacient.

Această capacitate de a urmări dinamic progresia și activitatea bolii sprijină monitorizarea continuă și eficientizarea intervențiilor terapeutice, îmbunătățind astfel calitatea vieții pacienților afectați.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Le Bas J.F. (2000). *Imagerie par résonance magnétique nucléaire. Bases physiques et techniques. Interprétation du contraste* - Laboratoire RMN, Université Claude-Bernard Lyon1, France
- [2] Chen C-N, Hoult D.I. (1989), *Biomedical Magnetic Resonance Technology* - Adam Hilger
- [3] Desgrez A., Bittoun J., Idy-Peretti I. (1994). *Bases physique de l'IRM* - Masson Ed., Paris
- [4] Hinshaw W.S., Lent A.H. (1983), *An Introduction to NMR Imaging: From the Bloch Equation to the Imaging Equation* - Proceedings of the IEEE, Vol. 71, no. 3, pp.338-350
- [5] Morris P. (1986), *Nuclear Magnetic Resonance Imaging in Medicine and Biology* – The Clarendon Press, Oxford
- [6] Sottolini F. (2000), *Physique et résolution de l'imagerie par résonance magnétique. Introduction aux techniques de marquage myocardique - tagging*, SPAMM - Université ClaudeBernard Lyon1 (UCBL), France
- [7] Levitt M. H., (2001), *Spin Dynamics: Basics of Nuclear Magnetic Resonance*, John Wiley& Sons,.
- [8] McConnell J., (1987), *The theory of Nuclear Magnetic resonance Relaxation in Liquids*, Cambridge Univ. Press, Cambridge

POTENȚIALUL DE INHIBARE HERG A SILIMARINEI ȘI CURCUMEI

Greta-Tamara KISS¹, Darius-Maximilian MANGRA¹, Adina-Monica TODERAȘ²

¹Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatica și Științe, student anul II Fizica Explorărilor și Terapiilor Biomedicale, Oradea, România

²Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatica și Științe, Departamentul de Fizică

Rezumat: *hERG reprezintă niște canale de ioni care reglează funcționarea potențialului de acțiune. Când acestea nu funcționează corect, potențialul de acțiune cardiac este prelungit, rezultând o prelungire caracteristică a intervalului QT pe electrocardiogramă, [1]. Această afecțiune este cunoscută sub numele de sindrom QT lung (LQT). Din acest motiv, inhibarea hERG este acum văzută ca o anti-țintă care trebuie evitată în timpul dezvoltării medicamentelor, [2]. În cadrul lucrării, am comparat, în urma simulărilor de andocare moleculară, afinitatea de legare a diferitor compuși farmaceutici, [3-6] cu cea a unor polifenoli. În ciuda apariției polifenolilor ca inhibitori hERG la o simulare ADMET, evaluările de andocare moleculară au relevat energii de legătură mai slabe decât cele ale compușilor farmaceutici utilizați în mod obișnuit. Prin urmare, deși pot inhiba hERG, potențialul lor este mai scăzut decât cel al farmaceuticelor respective.*

Cuvinte cheie: *hERG, Autodock, andocare moleculară*

INTRODUCERE

Canalul de potasiu (hERG sau Kv11.1) este un canal găsit în neuroni și celulele cardiace. El este dependent de tensiune și este implicat în repolarizarea potențialului de acțiune cardiacă. Acesta este generat de tipuri speciale de canale ionice, prezente în membrana plasmatică a celulei. Aceste canale sunt închise în mod normal, dar încep rapid să se deschidă în cazul în care potențialul membranar trece peste o anumită valoare de prag. În privința canalelor de sodiu apropiate, ionii de sodiu nu mai pot intra și sunt eliminați din membrana prin transport activ, [1, 2].

Pe măsură ce membrana se repolarizează, totuși, hERG se redeschide pe măsură ce își revine după inactivare, facilitând terminarea rapidă a potențialului de acțiune. Când hERG nu funcționează corect, potențialul de acțiune cardiac este prelungit, rezultând o prelungire caracteristică a intervalului QT pe electrocardiogramă (ECG). Această afecțiune clinică este cunoscută sub numele de sindrom QT lung (LQT) și este un precursor al aritmiei letale numită torsada vârfurilor. LQT din disfuncția hERG este observată în două contexte distincte, mutații ereditare ale genei hERG (LQT2) și induse de medicamente (LQTd), [1]. Cea din urmă apare deoarece moleculele diferitor medicamente blochează calea ionilor.

Din acest motiv, inhibarea hERG este acum văzută ca o anti-țintă care trebuie evitată în timpul dezvoltării medicamentelor [2].

MATERIALE ȘI METODE

Am evaluat proprietățile ADMET a unor polifenoli, curcuma și silimarina, și al unor farmaceutice administrate în inhibarea FGFR, anume: futibatinib, lirafugratinib, resigratinib și BLU9931, [3-6]. Aceste proprietăți le-am evaluat utilizând software-ul pkCSM, [7].

Datorită rezultatului pozitiv obținut pentru inhibarea hERG II în timpul acestei evaluări, am decis să studiem mai profund impactul potențial pe care îl poate avea administrarea compușilor drept medicamente. Pentru asta am efectuat studii de andocare moleculară care implică polifenolii și farmaceuticele utilizate în FGFR, utilizând structura Cryo-EM a hERG (identificată pe platforma <https://www.rcsb.org/> ca 5VA1), drept proteină. Software-ul de andocare utilizat a fost Autodock, [8].

Această abordare și-a propus să obțină rezultate cantitative pentru o evaluare cuprinzătoare. Caseta de căutare aleasă a fost identică cu cea specificată în lucrarea de cercetare asociată cu 5VA1, [1].

Fiecare simulare a avut o dimensiune a casetei de 60x60x60 Å cu intervale uniform distanțate de 0,5 Å. Algoritmul genetic a fost configurat cu 50 de rulări, având o dimensiune a populației de 300 și un număr de evaluări energetice cuprins între 8 și 12.000.000, pe baza numărului gradelor de

torsiune ale ligandului. O reprezentare a proteinei hERG se poate vedea în figura 1 atașată mai jos. Reprezentarea am obținut-o în urma introducerii 5VA1 în Mol*, [9].

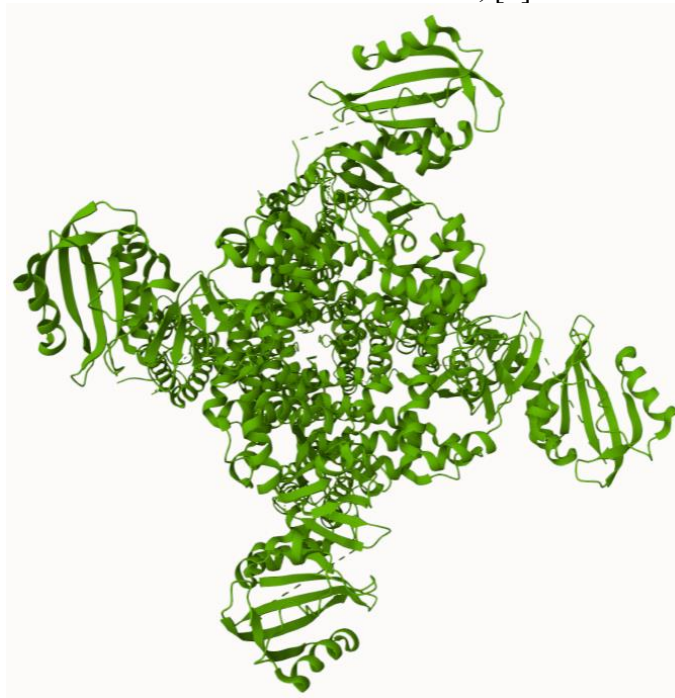


Figura 1. Structura hERG

REZULTATE ȘI DISCUȚII

Rezultatele simulării de andocare moleculară asupra hERG sunt următoarele: Futibatinib demonstrează o energie de legătură de -6,63 kcal/mol pe hERG, în timp ce lirafugratinib prezintă -6,87 kcal/mol, resigratinib -5,79 kcal/mol și blu9931 -6,44 kcal/mol. În schimb, curcuma și silimarina prezintă energii de legătură de -5,65 kcal/mol și, respectiv, -5,63 kcal/mol, pe aceeași hERG. Rezultatele se pot vedea și în tabelul 1 atașat mai jos.

Tabelul 1. Rezultatele andocării pe hERG

Ligand	Energie de legătură(kcal/mol)
Futibatinib	-6,63
Lirafugratinib	-6,87
Resigratinib	-5,79
Blu9931	-6,44
Curcumă	-5,65
Silimarină	-5,63

Rezultatele acestea indică faptul că polifenolii au demonstrat energii de legătură mai mici pentru hERG, indicând astfel o eficiență mai scăzută în comparație cu farmaceuticele utilizate în practică. Acest lucru se aliniază cu presupunerile noastre inițiale, anume ca polifenolii nu se leagă puternic de hERG și sunt astfel mai puțin dăunători față de medicamentele utilizate în practică. Prin urmare, deși pot inhiba hERG, potențialul lor este mai scăzut decât cel al farmaceuticelor.

CONCLUZII

Pentru a rezuma, curcuma și silimarina sunt niște compuși siguri, în ciuda apariției lor ca inhibitori hERG. Evaluările de andocare moleculară au relevat energii de legătură mai slabe decât cele ale unor farmaceutice utilizate în mod obișnuit.

BIBLIOGRAFIE

[1]. Wang, W., & MacKinnon, R. (2017), Cryo-EM structure of the open human ether-à-go-go -Related K + channel HERG. *Cell*, 169(3), 422-430.e10.

- [2]. Sanguinetti, M. C., & Tristani-Firouzi, M. (2006), hERG potassium channels and cardiac arrhythmia. *Nature*, 440(7083), 463–469. <https://doi.org/10.1038/nature04710>
- [3]. Gandhi, S. U., Casak, S. J., Mushti, S., Cheng, J., Subramaniam, S., Zhao, H., Zhao, M., Bi, Y., Liu, G., Fan, J., Adeniyi, O., Charlab, R., Kufrin, D., Thompson, M. D., Jarrell, K., Auth, D., Lemery, S. J., Pazdur, R., Kluetz, P. G., & Fashoyin-Aje, L. A. (2023), FDA Approval Summary: Futibatinib for Unresectable Advanced or Metastatic, Chemotherapy Refractory Intrahepatic Cholangiocarcinoma with FGFR2 Fusions or Other Rearrangements. *Clinical Cancer Research*, 29(20), 4027–4031.
- [4]. Subbiah V, Sahai V, Maglic D, Bruderek K, Touré BB, Zhao S, Valverde R, O'Hearn PJ, Moustakas DT, Schönherr H et al.. (2023), RLY-4008, the First Highly Selective FGFR2 Inhibitor with Activity across FGFR2 Alterations and Resistance Mutations. *Cancer Discov*, 13 (9): 2012-2031.
- [5]. Tyhonas, J. S., Arnold, L. D., Cox, J. M., Franovic, A., Gardiner, E., Grandinetti, K. B., Kania, R. S., Kanouni, T., Lardy, M., Li, C., Martin, E. S., Miller, N. L., Mohan, A., Murphy, E. A., Pérez, M. S., Sorocceanu, L., Timple, N., Uryu, S., Womble, S., & Kaldor, S. W. (2024), Discovery of KIN-3248, an irreversible, next generation FGFR inhibitor for the treatment of advanced tumors harboring FGFR2 and/or FGFR3 gene alterations.
- [6]. Hagel, M., Miduturu, C., Sheets, M. P., Rubin, N., Weng, W., Stransky, N., Bifulco, N., Kim, J. L., Hodous, B. L., Brooijmans, N., Shutes, A., Winter, C., Lengauer, C., Kohl, N. E., & Guzi, T. J. (2015), First Selective Small Molecule Inhibitor of FGFR4 for the Treatment of Hepatocellular Carcinomas with an Activated FGFR4 Signaling Pathway. *Cancer Discovery*, 5(4), 424–437.
- [7]. Pires, D.E.V., Blundell, T.L., Ascher, D.B. (2015), pkCSM: Predicting Small-Molecule Pharmacokinetic and Toxicity Properties Using Graph-Based Signatures. *J. Med. Chem.* 58, 4066–4072.
- [8]. <https://vina.scripps.edu/>
- [9]. Sehnal D., Bittrich S., Deshpande M., Svobodová R., Berka K., Bazgier V., Velankar S., K Burley S.K., Koča J., S Rose S.A. (2021). Mol. Viewer: modern web app for 3D visualization and analysis of large biomolecular structures, *Nucleic Acids Research*,

STUDIUL TRANSFERULUI DE CĂLDURĂ PRIN CONDUȚIE ÎN SOLIDE

Darius-Maximilian MANGRA¹, Cristian-Dorin HOREA²

¹Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatica și Științe, student anul II Fizica Explorărilor și Terapiilor Biomedicale, Oradea, România

²Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe, Departamentul de Fizică

Rezumat: Dacă există o diferență de temperatură între două puncte ale unui corp solid, se observă că după un interval de timp cele două puncte ajung la un echilibru termic. Conducția căldurii poate avea loc într-un corp numai când diferite părți ale corpului se află la temperaturi diferite, iar sensul schimbului de căldură este întotdeauna de la punctul de temperatură mai înaltă spre cel de temperatură mai joasă. S-a studiat transferul de căldură în solide folosindu-se bare de metal -din fier, cupru, aluminiu - și o bagheta de sticlă.

Cuvinte cheie: transfer de căldură, conductivitate, bare metalice

INTRODUCERE

Difuzia (conducția) termică este fenomenul de uniformizare spațială a temperaturii unui sistem prin apariția unui flux de căldură între părțile sale, aflate la temperaturi diferite. Așadar, un gradient de temperatură dă naștere unui flux de căldură [7].

Transferul căldurii prin conducție constă în transmisia căldurii dintr-o regiune cu temperatură mai ridicată către o regiune cu temperatură mai joasă, într-un corp sau între medii, în contact fizic direct, fără existența unei deplasări aparente a particulelor care alcătuiesc mediile [4].

Pentru un corp solid, la nivel microscopic, conducția termică se face prin intermediul moleculelor, al electronilor din banda de conducție și prin vibrațiile termice ale rețelei. Are loc astfel un transfer de căldură prin tot corpul solid, astfel se poate spune că solidul posedă o conductivitate termică [5]. Corpurile solide conduc în mod diferit căldura, iar mărimea fizică ce caracterizează substanța din punct de vedere al transportului de căldură este coeficientul de conductibilitate termică, notat cu λ .

Fenomenul conductibilității termice poate fi studiat în următoarele cazuri:

- regim variabil - temperatura în diferite puncte ale corpului, variază cu timpul;
- regim staționar (permanent) - temperatura corpului într-un punct oarecare nu variază în timp (cantitatea de căldură care trece printr-un element de volum este egală cu cea care pleacă din elementul de volum), ci depinde doar de distanța la care se află punctul în raport cu sursa de căldură [6].

În cazul metodei staționare aplicată pentru o bară solidă, dacă gradientul de temperatură este unidirecțional de-a lungul acesteia, cantitatea de căldură dQ transportată în unitatea de timp dt depinde de aria secțiunii normale S a barei, de gradientul de temperatură $\frac{\partial T}{\partial x}$ perpendicular pe această suprafață, conform formulei:

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial x}; \quad (1)$$

unde λ este coeficientul de conductivitate termică al metalului [3]. Egalitatea de mai sus reprezintă legea lui Fourier. Legea lui Fourier poate fi, de asemenea, utilizată pentru a calcula debitul schimbului de căldură printr-o placă sau orice alt corp omogen având o secțiune transversală uniformă perpendiculară pe direcția schimbului de căldură, cu condiția ca schimbul să ajungă la un regim staționar și capetele să fie menținute la temperaturi constante [8, p.582].

MATERIALE ȘI METODE

Elementele de bază ale aparaturii experimentale sunt: bare de metal (din fier, cupru și aluminiu) și o baghetă de sticlă, toate având lungimea de 150 mm, două termometre digitale cu sondă de imersiune și un termometru digital cu sondă de imersiune, NiCr-Ni, 50/1000 °C, încălzirea fiind asigurată de un încălzitor cu imersiune.

Pentru inițializarea experimentului, se fixează plasa de sârmă pe un suport, pe care se pune apoi paharul de laborator. Se fixează cele două cupe cilindrice în stânga și în dreapta vasului Berzelius. Se pune bara de cupru cu ajutorul unui tub de sticlă în unghi, astfel încât să existe un contact termic între un capăt al barei și apa din vasul Berzelius, iar celălalt capăt se introduce într-una dintre cupele cilindrice. Se repetă acest procedeu și pentru bara de fier.

Se umple cele două cupe cilindrice cu apă, până aproximativ la 2 mm de capătul de sus. Se fixează cele două termometre pe tabla magnetică și se introduc sondele termometrelor în cupele cilindrice. Sondă de imersiune NiCr-Ni a termometrului al treilea se introduce în vasul cu apa ce va fi încălzită de la o sursă de căldură[1].



Figura 1. Realizarea experimentului pentru studiul transferului de căldură prin conducție în solide : fier și cupru

Pentru măsurători, se umple cu apă vasul Berzelius și se introduce încălzitorul cu imersiune în vas, se încălzește apa până când aceasta fierbe, apoi se citesc temperaturile inițiale din cupele cilindrice (θ_1 și θ_2) și din vasul Berzelius (θ_f). Se pun barele metalice, pe cât posibil simultan, între vasul de sticlă și câte o cupă cilindrică. Se pornește cronometrul și se citesc temperaturile din cupele cilindrice și din vasul Berzelius după 5, 10 și 15 minute. Se calculează diferențele $\Delta\theta_1$ și $\Delta\theta_2$ ale temperaturilor din paharele de aluminiu față de cele din momentul inițial.

Se repetă procedeul anterior pentru o bară de aluminiu și bagheta de sticlă.



Figura 2. Realizarea gradientului de temperatură pentru barele de sticlă și aluminiu

REZULTATE ȘI DISCUȚII

Diferențele de temperatură în cele două setări experimentale sunt prezentate în Tabelele 1 și 2. La început, creșterea temperaturii în cupele cilindrice este lentă deoarece inițial barele trebuie să își omogenizeze temperatura acestora. Apoi se va forma un gradient de temperatură, aproximativ constant, între capetele barei (se constată experimental că acesta se formează după 5 minute)

Tabelul 1. Rezultatele experimentale pentru barele de fier și cupru

t (min)	$\theta_1(^{\circ}\text{C})$	$\theta_2(^{\circ}\text{C})$	$\Delta\theta_1(^{\circ}\text{C})$	$\Delta\theta_2(^{\circ}\text{C})$	$\theta_f(^{\circ}\text{C})$
5	25.2	25.2	0	0	99
10	26	30.7	0.8	5.5	99
15	26.9	36.2	1.7	11	100

Tabelul 2. Rezultatele experimentale pentru barele de aluminiu și sticlă

t (min)	$\theta_1(^{\circ}\text{C})$	$\theta_2(^{\circ}\text{C})$	$\Delta\theta_1(^{\circ}\text{C})$	$\Delta\theta_2(^{\circ}\text{C})$	$\theta_f(^{\circ}\text{C})$
5	25.2	25.2	0	0	99,2
10	26.2	25.2	1	0	99
15	27.4	25.2	2.2	0	99

Creșterea temperaturii în cupe este o măsură a căldurii ΔQ transferată prin bară atunci când un gradient de temperatură constant este format. De aceea, diferența de temperatură $\Delta\theta$ dintre cupe este calculată doar de la momentul $t=5$ min încolo (astfel Δt va lua valorile 10 min și 15 min pentru fiecare bară).

În cazul baghetei de sticlă s-a constatat că în timpul de 15 minute apa din cupă nu și-a schimbat temperatura, de aceea a fost nevoie de prelungirea experimentului până la creșterea temperaturii din cupă cu $\Delta\theta = 0.1$ grade, timpul total scurs fiind 25 de minute ($\Delta t = 20$ min).

Cupele conțin aceeași cantitate de apă, având aceeași căldură specifică [1]. Astfel se scrie:

$$\Delta Q = C \cdot \Delta\theta, \quad (2)$$

unde C este capacitatea calorică a vasului de aluminiu cu apă.

Mărimea C se calculează cu formula $C = m_1 c_1 + m_2 c_2$, unde m_1 este masa cupei de aluminiu, $c_1 = 900 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ este capacitatea calorică a aluminiului, m_2 este masa apei din cupa de aluminiu, $c_2 = 4180 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ este capacitatea calorică a apei.

Cele două mase se obțin prin cântărirea cupei goale, apoi a cupei cu apă (masa apei se află prin diferență). În urma măsurărilor și calculelor, $m_1 = 6,5\text{g}$, $m_2 = 36,5\text{g}$, $C = 158,42 \text{ J/kg}$

Pentru fluxul staționar mărimea acestuia depinde de gradientul constant format în bară datorită diferenței de temperatură dintre cele două capete ale barei [7].

Diferența de temperatură este cea dintre θ_f - temperatura capătului cald (de fierbere a apei din vas) și θ - temperatura capătului rece, din cupa de aluminiu (s-a renunțat la indicele 1 sau 2 în notarea temperaturii acestora).

Adaptând formula (1) condițiilor din experimentul de față, se obține:

$$\frac{Q}{\Delta t} = \lambda \cdot \frac{S}{l} \cdot (\theta_f - \theta) \quad (2)$$

S-a măsurat diametrul barelor d cu un micrometru, astfel că aria secțiunii transversale a barelor se află cu formula $S = \frac{\pi d^2}{4}$ și astfel coeficientul de conductibilitate se va calcula:

$$\lambda = \frac{4 \cdot C \cdot l \cdot \Delta\theta}{\pi d^2 \cdot \Delta t \cdot (\theta_f - \theta)} \quad (3)$$

Pentru fiecare bară s-au calculat două valori ale coeficientului, cu excepția sticlei, unde a fost nevoie de prelungirea duratei experimentului.

Rezultatele se găsesc în tabelul 3:

Tabelul 3. Mărimile obținute în urma măsurărilor și calculul coeficientului λ pentru cele 4 substanțe

	C (J/kg)	$\Delta\theta$ ($^{\circ}\text{C}$)	Δt (s)	l (m)	d (m)	θ_f ($^{\circ}\text{C}$)	θ ($^{\circ}\text{C}$)	λ (W/mK)
fier	158,42	0.8	300	0.15	$4.75 \cdot 10^{-3}$	99	26	48.99
		1.7	600			100	26.9	51.98
cupru		5.5	300		$4.8 \cdot 10^{-3}$	99	30.7	352.50
		11	600			100	36.2	377.37
aluminiu		1	300		$2.8 \cdot 10^{-3}$	99	26.2	176.71
		2.2	600			99	27.4	197.64
sticlă		0	600		$5.2 \cdot 10^{-3}$	99	25.2	-
		0.1	1200			99	25.4	1.09

CONCLUZII

Experimentele de evidențiere a conductivității termice a solidelor (metale - fier, cupru, aluminiu - precum și sticlă) necesită calculul fluxului de energie printr-o bară din aceste materiale. Acest flux este dependent de conductibilitatea termică, de aria secțiunii S și de lungimea l a barei, precum și de diferența de temperatură dintre cele două capete ale barei [4]. Se menține un gradient de temperatură constant la capetele barei și astfel se pot estima coeficienții de conductivitate termică.

Rezultatele obținute sunt în bună concordanță cu valorile tabelare din literatura de specialitate.

Se remarcă o diferență semnificativă între valorile obținute pentru metale comparativ cu sticla, care poate fi considerată izolator termic. Dintre metale, se remarcă conductivitatea termică mai scăzută a fierului, iar cuprul este conductorul cel mai bun (și astfel folosit în instalații de transmitere a căldurii).

BIBLIOGRAFIE

- [1] *** – *Demonstration Experiments in Physics*, Thermodynamics on the Magnetic Board Phywe Series of publications, Phywe Systeme Gmbh, Gottingen
- [2] Anghel, S. (2010), *Fenomene termice*, Editura Universității din Pitești
- [3] Filip, S.M., Budașcă, Ș., Horea, C., Ardelean D. (2000), *Fizică moleculară și căldură - lucrări de laborator*, Universitatea din Oradea,. (lucrarea nr.15)
- [4] Filip, S.M., Horea, C. (2008), *Fizică I – Fizică moleculară și căldură. Note de curs și aplicații*, Universitatea din Oradea
- [5] Georgescu, V, Sorohan, M. (1996), *Fizică moleculară*, Universitatea “Alexandru Ioan Cuza” Iași
- [6] Halliday, D., Resnick, R. (1975), *Fizică*, vol I, Editura didactică și pedagogică, București
- [7] Ilonca, Gh. (2004), *Fizică moleculară și căldură*, Universitatea „Babeș-Bolyai” Cluj-Napoca
- [8] Sears, F.W., Zemansky, M.W., Young, H.D. (1983), *Fizică*, Editura didactică și pedagogică, București

PROTOCOL STANDARD DE ANDOCARE UTILIZÂND AUTODOCK

Darius-Maximilian MANGRA¹, Adina-Monica TODERAȘ², Alexandru TODERAȘ³

¹Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatica și Științe, student anul II Fizica Explorărilor și Terapiilor Biomedicale, Oradea, România

²Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatica și Științe, Departamentul de Fizică

³Liceul Tehnologic Felix, Sânmartin, profesor

Rezumat: Andocare moleculară este utilizată pentru a modela interacțiunea dintre o moleculă mică și o proteină, la nivel atomic, permițându-ne să studiem comportamentul moleculelor mici în locul de legare al proteinelor țintă, [1]. AutoDock este una dintre cele mai citate aplicații utilizate în andocarea moleculară, [2], astfel, prin lucrarea de față am ales să prezentăm un ghid pas cu pas pentru realizarea unui protocol standard de andocare, utilizând software-ul Autodock, [3].

Cuvinte cheie: Autodock, andocare, protocol

INTRODUCERE

Andocarea moleculară a devenit o unealtă tot mai importantă în domeniul dezvoltării medicamentelor. Aceasta poate fi utilizată pentru a modela interacțiunea dintre o moleculă mică și o proteină la nivel atomic, permițându-ne să studiem comportamentul moleculelor mici în locul de legare al proteinelor țintă, precum și să observăm procesele biochimice fundamentale care au loc acolo, [1, 2].

Procesul de andocare constă în două etape de bază: predicția conformației ligandului și evaluarea afinității de legare pe baza calculului energiei de legătură. Conformațiile generate sunt organizate pe baza eficacității lor în legarea la proteina aleasă. Valori energetice mai mici în acest algoritm de clasare indică interacțiuni mai favorabile [4].

MATERIALE ȘI METODE

Primii pași ai andocării constă în pregătirea ligandului și a proteinei. Avem nevoie de acești pași incipienți pentru a asigura rezultate cât mai realiste.

În primul rând, vom descărca structura ligandului în formatul Simulation Description Format (.SDF) de pe platforma PubChem (<https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/>). Deoarece AutoDock nu poate deschide fișiere .SDF, le vom converti în formatul Protein Data Bank (.PDB), folosind software-ul Open Babel, [5]. Următorul pas constă în importarea ligandului (în format .PDB) în AutoDock (ADT), unde se vor adăuga sarcini electrice și legăturile rotative (din meniul *Ligand*). Pe urmă, versiunea finală, cea care este utilizată în andocare, va fi salvată în formatul nativ AutoDock, care este formatul Protein Data Bank, Partial Charge și Atom Type (.PDBQT). O diagramă reprezentativă a acestui proces poate fi văzută în figura 1 de mai jos.

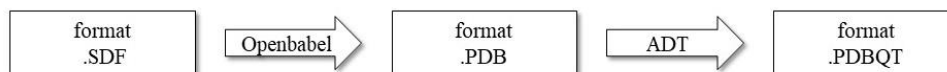


Figura 1. Pașii pregătirii ligandului

Structura proteinei a fost descărcată de pe platforma Research Collaboratory for Structural Bioinformatics Protein Data Bank (PDB) (<https://www.rcsb.org/>). Aceasta o importăm în AutoDock, unde urmează să îndepărtăm moleculele de apă, să adăugăm hidrogenul polar, să adăugăm sarcini electrice Kollman și să verificăm distribuirea egală a acestora (toate acestea din meniul *Edit*). După aceasta, versiunea finală a proteinei o salvăm în formatul .PDBQT, [4]. O diagramă corespunzătoare pentru procesul de pregătire a proteinei poate fi văzută în figura 2.

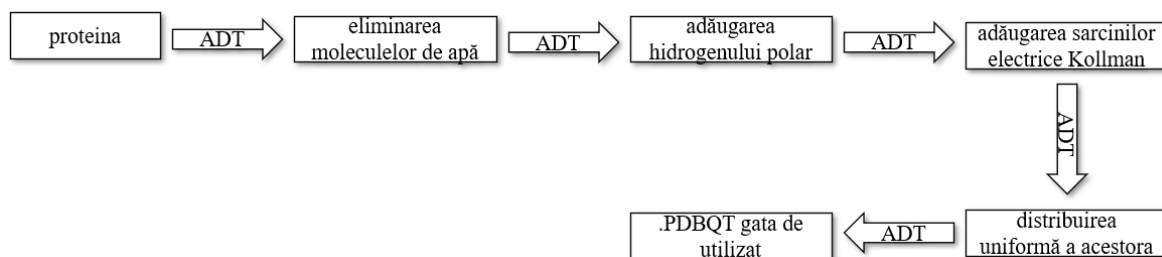


Figura 2. Pașii pregătirii proteinei

După efectuarea acestor pași incipienți putem continua cu protocolul de andocare.

Inserarea ligandului și a proteinei se fac în următorul fel:

Ligand – Input – Open - alegem ligandul dorit, și pentru proteină:

Grid - Macromolecule - Open - alegem proteina dorită.

După aceasta, în fereastra din partea stângă ne vor apărea numele ambelor structuri iar în partea dreaptă reprezentarea structurii acestora. O captură de ecran care să ilustreze cele menționate se poate vedea în figura 3 de mai jos.

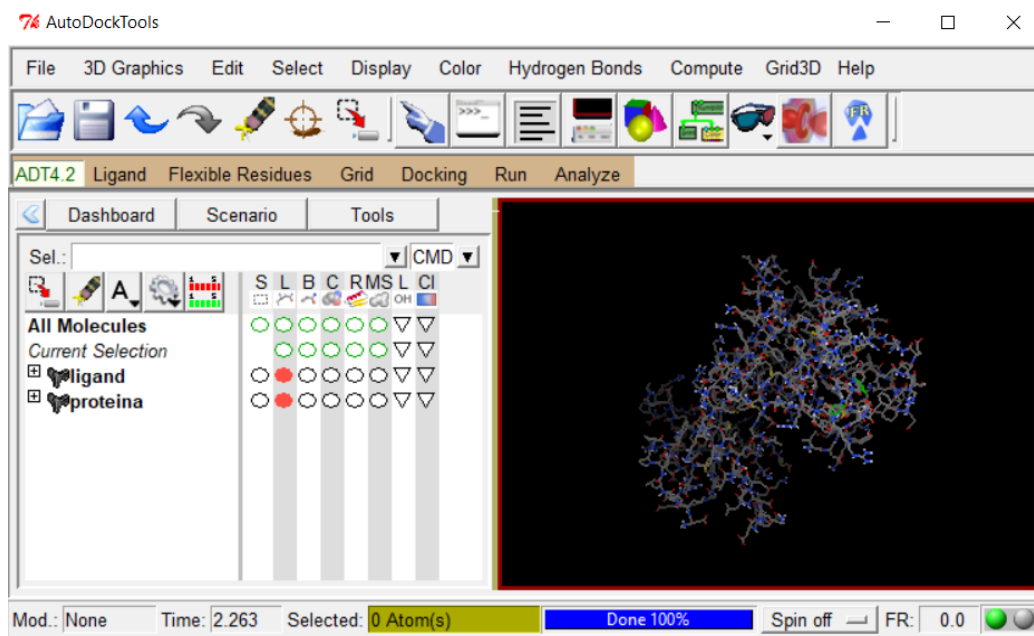


Figura 3. Introducerea ligandului și proteinei în AutoDock

Mai departe, este nevoie să creăm hărțile cu coordonate atomice. Ele sunt importante deoarece ne arată cu ce energii se leagă diferite tipuri de atomi de proteina în cauză. Vom avea astfel câte o hartă pentru fiecare tip de atom a ligandului. Pentru a le crea urmăm pașii:

Grid – Gridbox - selectăm valorile pentru dimensiunea regiunii de căutare și centrul acesteia. Regiunea poate să cuprindă întreaga proteină sau numai o parte din ea, dacă se cunoaște exact locul în care urmează să aibă loc interacțiunea. Regiunea de andocare se poate afla uneori din lucrările de cercetare publicate alături de structura proteinelor. În figura 4 de mai jos se poate observa dimensiunea regiunii de căutare suprapusă peste o proteină, alături de fereastra de selectare a parametrilor acesteia.

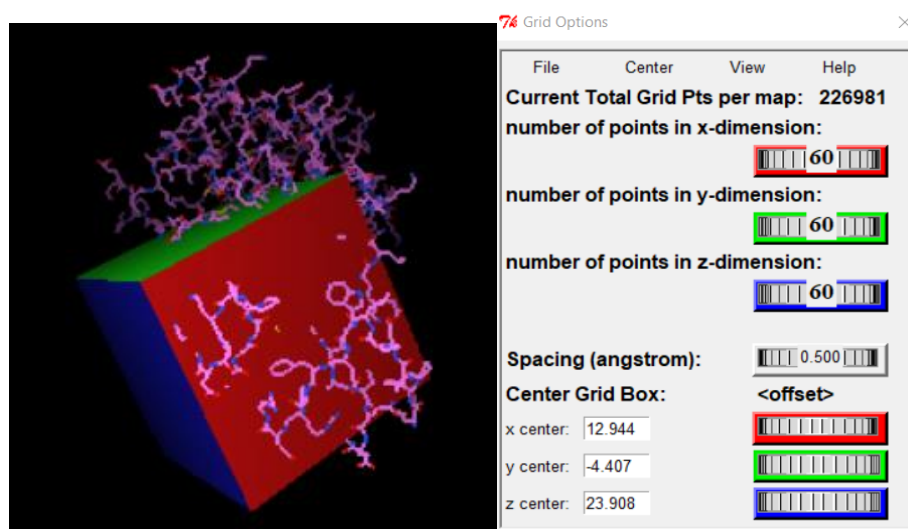


Figura 4. Regiunea de căutare și lista parametrilor acesteia

Grid - Output - Save GPF. Fișierul Grid Parameter File conține toate informațiile necesare despre parametrii regiunii de căutare care sunt utilizați în simulările de andocare. Acești parametri includ dimensiunea regiunii de căutare, centrul acesteia, distanța dintre punctele sale și alte setări specifice legate de calcularea interacțiunilor dintre ligand și proteină. Acești parametri se pot vedea și în figura 5 atașată mai jos.

```
hpts 60 60 60                                # num.grid points in xyz
parameter_file AD4_parameter.dat              # force field default parameter file
gridfld FGFR4.maps.fld                       # grid_data_file
spacing 0.5                                  # spacing(A)
receptor_types A C HD N OA SA                 # receptor atom types
ligand_types A C HD N NA OA SA               # ligand atom types
receptor FGFR4.pdbqt                         # macromolecule
gridcenter 12.944 -4.407 23.908              # xyz-coordinates or auto
smooth 0.5                                   # store minimum energy w/in rad(A)
map FGFR4.A.map                             # atom-specific affinity map
map FGFR4.C.map                             # atom-specific affinity map
map FGFR4.HD.map                            # atom-specific affinity map
map FGFR4.N.map                             # atom-specific affinity map
map FGFR4.NA.map                            # atom-specific affinity map
map FGFR4.OA.map                             # atom-specific affinity map
map FGFR4.SA.map                             # atom-specific affinity map
elecmap FGFR4.e.map                         # electrostatic potential map
dsolvmap FGFR4.d.map                        # desolvation potential map
dielectric -0.1465                          # <0, AD4 distance-dep.diel;>0, constant
```

Figura 5. Fișier de tip .GPF

Pe baza acestui fișier .GPF, AutoDock poate căuta eficient orientări de legare și conformații favorabile ale ligandului în regiunea de legare al proteinei. Informațiile stocate în fișierul .GPF sunt esențiale pentru interpretarea rezultatelor obținute în urma simulărilor de andocare, [6]. Rularea AutoGrid are loc în următorul fel:

Run - Run AutoGrid - selectăm calea către fișierul .GPF și calea către locul în care executabilul AutoGrid este instalat.

După rularea cu succes a programului vom vedea că se salvează automat câte un fișier pentru fiecare tip de atom din care este alcătuit ligandul, adică în acest caz, conform figurii 5: carbon aromatic (A), carbon alifatic (C), hidrogen cu legături donatoare(HD), nitrogen care nu acceptă legături de hidrogen (N), nitrogen care acceptă legături de hidrogen (NA), oxigen care acceptă legături de hidrogen (OA) și sulf care acceptă legături de hidrogen (SA). Pe lângă hărțile specifice fiecărui atom, se mai creează câte o hartă a energiei potențiale electrostatice și una a energiei potențiale de desolvatare.

Orice tip de hartă constă de fapt dintr-o rețea tridimensională de puncte distanțate în mod regulat și centrate pe o anumită regiune de interes a proteinei în studiu. Fiecare punct din hartă stochează energia potențială a unui atom „sondă”, energie care se datorează tuturor atomilor din macromoleculă. AutoGrid creează pe lângă mapele specifice încă două fișiere cu extensiile „.fld” și „.xyz”. Primul este un fișier de câmp care rezumă toate mapele create iar cel din urmă descrie întinderea spațială a regiunii de căutare în spațiul cartezian, [6].

Acum că avem hărțile necesare putem să continuăm cu procesul de andocare în sine. Pașii necesari sunt următorii:

Docking – Macromolecule - Set Rigid Filename - selectăm proteina, deoarece ea este cea care rămâne rigidă în timpul andocării.

Docking - Ligand - Choose - selectăm ligandul

Docking - Search parameters - Genetic algorithm - după care se va deschide fereastra în care selectăm parametrii algoritmului genetic. Cei mai importanți parametri ai algoritmului genetic sunt, conform ordinii din figura 6 de mai jos:

Number of GA Runs:	10
Population Size:	150
Maximum Number of evals:	medium 250000
Maximum Number of generations:	27000
Maximum Number of top individuals that automatically survive:	1
Rate of Gene Mutation:	0.02
Rate of Crossover:	0.8
GA Crossover mode:	twopt
Mean of Cauchy distribution for gene mutation:	0.0
Variance of Cauchy distribution for gene mutation:	1.0
Number of generations for picking worst individual:	10
Accept Close	

Figura 6. Parametrii algoritmului genetic

Numărul total de rulări a algoritmului- acesta poate lua orice valoare și indică de fapt de câte ori s-a rulat algoritmul. Valoarea standard este de 10 rulări.

Mărimea populației- reprezintă numărul de indivizi din populație. Fiecare individ este o cuplare a unui genotip și fenotipul asociat acestuia. În general, valorile sunt cuprinse între 50 și 200.

Numărul maxim de evaluări- reprezintă numărul maxim de evaluări energetice din fiecare rulare. Valoarea standard, cea de 250.000 este în general utilizată pentru liganzi cu până la 10 legături flexibile. Odată cu creșterea numărului de legături flexibile, și numărul maxim de evaluări trebuie să crească pentru a oferi rezultate cât mai apropiate de realitate.

Numărul maxim de generații- este numărul maxim de generații de indivizi produse în fiecare rulare. Valoarea standard este de 27.000.

Numărul maxim de indivizi care supraviețuiesc- este numărul total de indivizi dintr-o generație care supraviețuiesc. Valoarea predefinită este de 1.

Rata mutației genei- este un număr subunitar care exprimă probabilitatea ca o anumită genă să fie mutată. În general se utilizează valori scăzute pentru acest parametru, 0.02 fiind standard.

Rata încrucișării- reprezintă numărul de perechi dintr-o generație care vor face schimb de material genetic. Și acest parametru este subunitar, valoarea standard fiind de 0.8.

Algoritmul genetic rulează până când este atins numărul maxim de evaluări sau numărul maxim de generații, [7].

În continuare: *Docking – Output – Lamarckian GA* – alegem un nume pentru nou creatul fișier .DPF .

Fișierul cu parametrii de andocare (.DPF) conține tot ceea ce are nevoie programul pentru a rula cu succes simularea de andocare, mai exact: hărțile cu coordonate atomice care vor fi utilizate pentru andocare și parametrii pentru căutare. În figura 7 de mai jos se pot vedea parametrii pe care îi conține un fișier de tip .DPF.

```

autodock_parameter_version 4.2      # used by autodock to validate parameter set
outlev 1                            # diagnostic output level
intelec                             # calculate internal electrostatics
seed pid time                        # seeds for random generator
ligand_types A C HD OA              # atoms types in ligand
fld FGFR4.maps.fld                  # grid_data file
map FGFR4.A.map                      # atom-specific affinity map
map FGFR4.C.map                      # atom-specific affinity map
map FGFR4.HD.map                     # atom-specific affinity map
map FGFR4.OA.map                     # atom-specific affinity map
elecmap FGFR4.e.map                  # electrostatics map
desolvmap FGFR4.d.map                # desolvation map
move astilbin.pdbqt                 # small molecule
about 0.022 0.976 -2.660             # small molecule center
tran0 random                         # initial coordinates/A or random
quaternion0 random                  # initial orientation
dihe0 random                         # initial dihedrals (relative) or random
torsdof 10                           # torsional degrees of freedom
rmstol 2.0                           # cluster_tolerance/A
extnrg 1000.0                        # external grid energy
e0max 0.0 10000                      # max initial energy; max number of retries
ga_pop_size 300                      # number of individuals in population
ga_num_evals 10000000                 # maximum number of energy evaluations
ga_num_generations 27000              # maximum number of generations
ga_elitism 1                          # number of top individuals to survive to next generation
ga_mutation_rate 0.02                 # rate of gene mutation
ga_crossover_rate 0.8                 # rate of crossover
#
# Alpha parameter of Cauchy distribution
ga_cauchy_alpha 0.0                  # Beta parameter Cauchy distribution
ga_cauchy_beta 1.0                   # set the above parameters for GA or LGA
set_ga                               # iterations of Solis & Wets local search
sw_max_its 300                       # consecutive successes before changing rho
sw_max_succ 4                        # consecutive failures before changing rho
sw_max_fail 4                         # size of local search space to sample
sw_rho 1.0                           # lower bound on rho
sw_lb_rho 0.01                       # probability of performing local search on individual
ls_search_freq 0.06                  # set the above pseudo-Solis & Wets parameters
set_psw1                             # state of unbound ligand
unbound_model bound                  # do this many hybrid GA-LS runs
ga_run 50                            # perform a ranked cluster analysis
analysis

```

Figura 7. Fișier de tip .DPF

Acum, pentru rularea propriu-zisă a andocării:

Run - AutoDock – și selectăm calea către locul în care este instalat executabilul și calea către locul în care este salvat fișierul .DPF.

La sfârșitul rulării se va crea un nou fișier cu extensia .DLG, Docking Log File. Acest fișier reprezintă de fapt rezultatul final al andocării. El conține toate informațiile referitoare la procesul de andocare. Dintre acestea, cele mai importante sunt: informații energetice ale complexului nou creat (energii de legătură) și conformația propriu-zisă a complexului format din ligand și proteină.

Pentru a analiza conformațiile nou create vom face următorul lucru:

Analyze – Dockings – Open – alegem fișierul .DLG pe care vrem să îl analizăm

Analyze – Macromolecule – Open – se va deschide automat proteina pe care s-a efectuat andocarea.

Analyze – Conformations – Play – unde ni se va deschide o fereastră din care vom putea naviga între diferitele conformații. De aici vom apăsa pe iconița “&”. Se va deschide din nou o fereastră unde selectăm iconița “Show Info”. Aceasta ne va deschide o a treia fereastră care conține informații despre fiecare conformație în parte.

În figura 8 de mai jos se poate vedea un exemplu în care se văd informațiile primei conformații ale unei simulări pe care am efectuat-o.

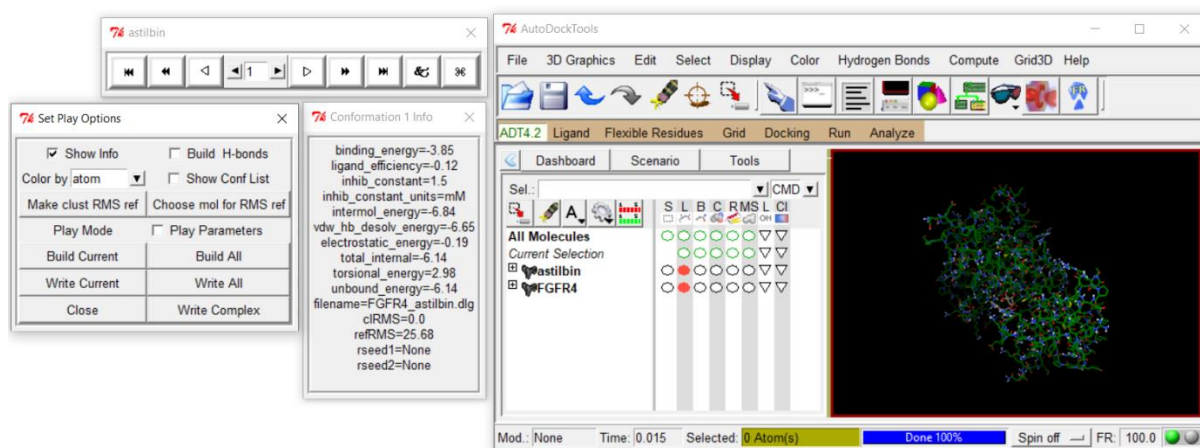


Figura 8. Analiza rezultatelor

După ce găsim conformația dorită, adică cea cu energia de legătură cea mai scăzută, apăsăm butonul “Write Complex” pe urmă alegem un nume pentru complexul nou creat și o locație unde să fie salvat. Complexul nou creat se va salva în format .PDBQT iar el poate fii prelucrat în continuare, [4, 6].

CONCLUZII

Prin această lucrare, am prezentat modul de lucru prin care se efectuează o andocare moleculară standard.

BIBLIOGRAFIE

- [1]. Meng, X., Zhang, H., Mezei, M., & Cui, M. (2011), Molecular Docking: a powerful approach for Structure-Based drug discovery. *Current Computer-aided Drug Design*, Vol. 7(2), pp. 146–157
- [2]. Sousa SF, Fernandes PA, Ramos MJ (October 2006). "Protein-ligand docking: current status and future challenges". *Proteins*. Vol.65 (1), pp. 15–26
- [3]. <https://vina.scripps.edu/>
- [4]. Morris, G.M., Ruth, H., Lindstrom, W., Sanner, M.F., Belew, R.K., Goodsell, D.S., Olson, A.J. 2009 AutoDock4 and AutoDockTools4: *Automated Docking with Selective Receptor Flexibility*. *J. Comput. Chem.*, Vol.30, pp. 2785–2791.
- [5]. <https://www.cheminfo.org/Chemistry/Cheminformatics/FormatConverter/index.html>
- [6]. https://autodock.scripps.edu/wpcontent/uploads/sites/56/2021/10/AutoDock4.2.6_UserGuide.pdf
- [7]. Morris, G. M., Goodsell, D. S., Halliday, R. S., Huey, R., Hart, W. E., Belew, R. K., & Olson, A. J. (1998), *Automated docking using a Lamarckian genetic algorithm and an empirical binding free energy function*. *Journal of Computational Chemistry*, Vol.19(14), pp.1639–1662.

TRANSFORMAREA POLITROPĂ ȘI MODUL DE ABORDARE APLICATIVĂ ÎN CONTEXTUL EXAMENELOR DE DEFINITIVARE ȘI DE TITULARIZARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR

Camelia MEDREA¹, Carmen-Daniela CĂPITANU²

¹Liceul Teologic Penticostal „Betel”, Oradea, camimoza@yahoo.com

²Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe, Departamentul de Fizică, c.carmen.d@gmail.com

Rezumat: Concursurile organizate pentru ocuparea unor posturi didactice din învățământul preuniversitar prezintă sarcini de lucru grupate pe trei categorii: cunoașterea științifică (cu alte cuvinte, subiecte de fizică - teorie), rezolvarea de probleme și cunoașterea metodică. Lucrarea de față își propune să atragă atenția asupra cunoașterii aprofundate a noțiunilor de fizică, necesare pentru rezolvarea problemelor propuse. Este prezentat un subiect, împreună cu rezolvarea sa în detaliu și cu contextul științific în care se încadrează acesta. Se constată că, pentru a răspunde la o astfel de sarcină de lucru, este nevoie de o bună cunoaștere științifică și de o gândire critică și structurată pentru a se obține o rezolvare corectă și ușor de urmărit.

Cuvinte-cheie: transformarea politropă, indice politropic, căldura molară în transformarea politropă, rezolvare de probleme

INTRODUCERE

Se numește transformare politropă, transformarea pe care o suferă un sistem termodinamic închis, în care căldura molară rămâne constantă ($C_\mu = \text{const.}$) [1, 2, 4, 5, 6].

În cele ce urmează, se va lucra în aproximația gazului ideal.

Prin definiție, se numește gaz ideal, gazul care îndeplinește condițiile: este format dintr-un număr mare de particule considerate identice, care se mișcă conform legilor mecanicii clasice și care pot fi considerate ca puncte materiale, dimensiunile lor fiind mici în raport cu distanțele dintre ele, forțele intermoleculare sunt neglijabile, astfel încât traiectoriile moleculelor în interiorul vasului sunt linii drepte, iar ciocnirile dintre molecule și cele cu pereții vasului sunt perfect elastice.

Ecuția (legea) transformării politrope se poate stabili pornind de la expresia matematică a primului principiu al termodinamicii [2, 6]:

$$\left. \begin{aligned} \delta Q &= dU + p dV \\ dU &= \nu C_V dT \\ \delta Q &= \nu C dT \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nu C dT = \nu C_V dT + p dV \Rightarrow dT = \frac{p dV}{\nu(C - C_V)}$$

unde s-a notat cu C căldura molară a gazului ideal.

Se diferențiază ecuația termică de stare a gazului ideal, $pV = \nu RT$, și se poate scrie, folosind expresia lui dT , și ecuația Robert-Mayer ($C_p = C_V + R$):

$$p dV + V dp = \nu R dT \Rightarrow \frac{C - C_p}{C - C_V} \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$$

Se notează:

$$\frac{C - C_p}{C - C_V} = n$$

unde n poartă numele de indice politropic și rezultă:

$$\frac{dp}{p} + n \cdot \frac{dV}{V} = 0$$

relație care se integrează, obținându-se legea transformării politrope:

$$pV^n = \text{const.}$$

Se disting următoarele cazuri particulare:

- dacă $n = 1 \Rightarrow pV = \text{const}$, deci transformarea este izotermă
- dacă $n = 0 \Rightarrow p = \text{const}$, atunci transformarea este izobară

- dacă $n = \gamma \Rightarrow pV^\gamma = \text{const}$, transformarea este adiabatică

Se observă că se poate scrie următoarea relație:

$$dV = -\frac{1}{n} \cdot \frac{Vdp}{p}$$

în care, pentru $n \rightarrow \infty$, rezultă:

$$dV = 0 \Rightarrow V = \text{const.}$$

deci transformarea este izocoră.

Expresia căldurii molare într-o transformare politropă rezultă din expresia indicelui politropic:

$$\frac{C - C_p}{C - C_v} = n \Rightarrow C = C_v - \frac{R}{n-1}$$

Reprezentarea grafică a dependenței $p = p(V)$ pentru o transformare politropă este prezentată în figura 1.

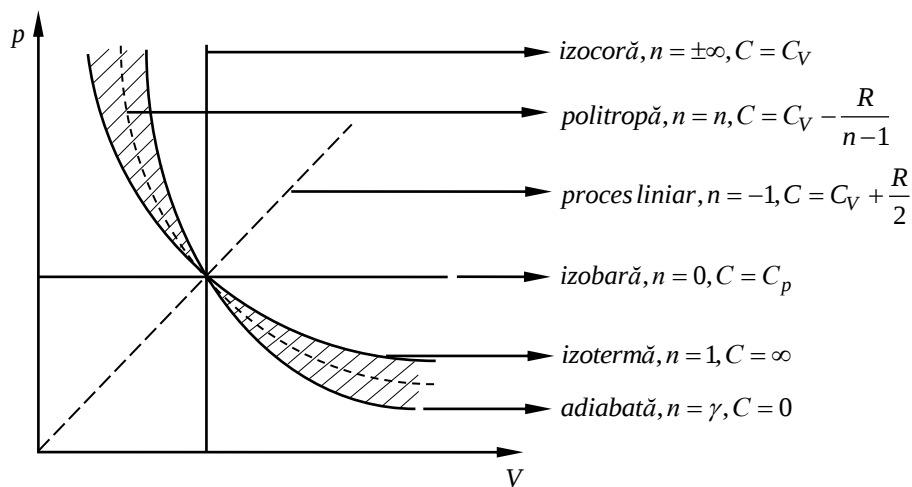


Figura 1. Reprezentarea grafică a unei transformări politrope în sistem de coordonate (p, V) [2]

O transformare politropă care apare deseori în probleme este cea reprezentată, în coordonate (p, V) , printr-o dreaptă care trece prin originea sistemului de axe (cea denumită „proces liniar” în figura 1). Se observă că dependența $p = p(V)$ este în acest caz liniară, ceea ce se poate scrie:

$$p = \text{const.} \cdot V \Rightarrow \frac{p}{V} = \text{const.} \Rightarrow pV^{-1} = \text{const.}$$

Rezultă astfel o transformare politropă având indicele politropic $n = -1$ și căldura molară $C = C_v + \frac{R}{2}$.

În ceea ce privește căldura molară, reprezentarea grafică a dependenței $C = C(n)$ este cea din figura 2.

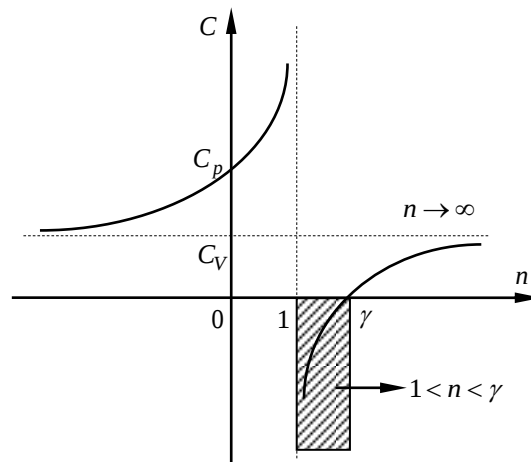


Figura 2. Dependența căldurii molare de indicele politropic [2]

Se observă că în cazul $1 < n < \gamma$, căldura molară este negativă, ceea ce înseamnă că dacă gazul primește căldură (ceea ce înseamnă $Q > 0$), variația de temperatură trebuie să fie negativă ($\Delta T < 0$), deci gazul se răcește. [2]

Se observă că, folosind ecuația termică de stare a gazului ideal, se mai poate scrie:

$$pV = \nu RT \Rightarrow p = \frac{\nu RT}{V} \Rightarrow \frac{\nu RT}{V} V^n = \text{const.} \Rightarrow TV^{n-1} = \text{const.}$$

respectiv:

$$pv = \nu RT \Rightarrow V = \frac{\nu RT}{p} \Rightarrow p \left(\frac{\nu RT}{p} \right)^n = \text{const.} \Rightarrow p^{1-n} T^n = \text{const.}$$

acestea fiind alte forme sub care poate fi folosită legea transformării politrope, în funcție de datele cunoscute.

PUNEREA PROBLEMEI

În ceea ce urmează, se aduce în discuție rezolvarea unei probleme în care un gaz ideal suferă mai multe transformări politropice. Problema a fost propusă spre rezolvare în cadrul concursului național de ocupare a posturilor didactice/catedrelor vacante/rezervate din învățământul preuniversitar din 12 iulie 2023 [7], rolul său fiind de evaluare și departajare a candidaților.

Din punct de vedere metodic, rezolvarea de probleme este o metodă de predare-învățare-evaluare complexă, care are la bază efectuarea unor operații mintale și motrice cu scopul formării de priceperi, deprinderi și abilități de muncă intelectuală și fizică, cu un scop multiplu: înțelegerea esenței fizice și a noțiunilor studiate, aprofundarea cunoștințelor prin repetarea și fixarea materiei însușite, dobândirea încrederii în forțele proprii, formarea deprinderii de a învinge obstacole în cazul rezolvării problemelor cu grad sporit de dificultate, stabilirea de corelații între fizică și științele înrudite, exersarea și aprofundarea cunoștințelor de matematică, dându-le acestora un sens concret, sporirea operativității gândirii, familiarizarea cu unități de măsură, verificarea rapidă a cunoștințelor dobândite [3]. Din acest motiv, este necesar ca tehnica rezolvării de probleme să fie bine stăpânită de către profesor, ca parte a pregătirii sale metodico-științifice.

Astfel, în cadrul concursurilor de ocupare a posturilor didactice, rezolvarea de probleme ca sarcină de lucru distinctă are mai multe roluri, printre care se numără verificarea modului în care sunt folosite cunoștințele teoretice la rezolvarea unor situații descrise în ipoteza problemei și a modului în care sunt structurate, ordonate, prezentate și utilizate procesele mentale pe baza cărora se realizează rezolvarea propriu-zisă a problemei.

DISCUȚII PE STUDIUL DE CAZ

Considerațiile de mai sus vor fi exemplificate cu ajutorul problemei de termodinamică înainte menționate [7].

Astfel, se consideră că o cantitate dată de gaz ideal monoatomic este supusă unui proces ciclic $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ în cursul căruia pătratul densității gazului variază cu temperatura sa absolută conform graficului din figura 3. În transformarea $2 \rightarrow 3$ dependența de temperatură a pătratului densității este $\rho^2 = \frac{a}{T}$, unde $a = \text{const.}$ Se cere să se determine:

- a) raportul $\frac{\Delta U_{23}}{\Delta U_{31}}$ dintre variația energiei interne a gazului între starea 2 și starea 3 și variația energiei interne a gazului între starea 3 și starea 1
 b) randamentul unui motor termic care ar funcționa după transformarea ciclică descrisă

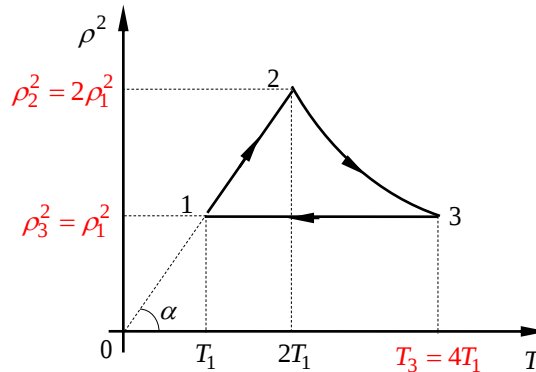


Figura 3. Proces termodinamic ciclic în coordonate (ρ^2, T)

- a) Raportul celor două variații de energie internă este:

$$\frac{\Delta U_{23}}{\Delta U_{31}} = \frac{\nu C_V (T_3 - T_2)}{\nu C_V (T_1 - T_3)} = \frac{T_3 - 2T_1}{T_1 - T_3}$$

Se observă că trebuie determinată relația dintre temperaturile T_3 și T_1 . Dacă se consideră fiecare din transformările $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$ și $3 \rightarrow 1$, se poate scrie:

- pentru transformarea $2 \rightarrow 3$:

$$\rho^2 = \frac{a}{T} \Rightarrow \rho^2 T = a = \text{const.} \Rightarrow \rho_2^2 T_2 = \rho_3^2 T_3 \Rightarrow T_3 = T_2 \frac{\rho_2^2}{\rho_3^2} = 2T_1 \frac{\rho_2^2}{\rho_3^2}$$

iar pentru transformarea $1 \rightarrow 2$:

$$\tan \alpha = \frac{\rho_1^2}{T_1} = \frac{\rho_2^2}{2T_1} \Rightarrow \rho_2^2 = \rho_1^2 \frac{2T_1}{T_1} = 2\rho_1^2 \Rightarrow \rho_2^2 = 2\rho_1^2$$

- pentru transformarea $3 \rightarrow 1$:

$$\rho^2 = \text{const.} \Rightarrow \rho = \text{const.} \Rightarrow \frac{m}{V} = \text{const.} \Rightarrow V = \text{const.}$$

deci aceasta este o transformare izocoră

Rezultă astfel:

$$T_3 = 2T_1 \frac{\rho_2^2}{\rho_3^2} = 2T_1 \frac{2\rho_1^2}{\rho_1^2} = 4T_1$$

și se determină raportul cerut:

$$\frac{\Delta U_{23}}{\Delta U_{31}} = \frac{T_3 - 2T_1}{T_1 - T_3} = \frac{4T_1 - 2T_1}{T_1 - 4T_1} = -\frac{2}{3}$$

b) Randamentul motorului termic care ar funcționa după transformarea ciclică descrisă are expresia:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_{acc}}$$

unde:

$$\begin{aligned} Q_{12} &= \nu C_{12} (T_2 - T_1) = \nu C_{12} T_1 (> 0) \\ Q_{23} &= \nu C_{23} (T_3 - T_2) = \nu C_{23} (4T_1 - 2T_1) = 2\nu C_{23} T_1 (> 0) \\ Q_{31} &= \nu C_V (T_1 - T_3) = \nu C_V (T_1 - 4T_1) = -3\nu C_V T_1 = -\frac{9}{2} \nu R T_1 (< 0) \end{aligned}$$

Se observă că trebuie determinate căldurile molare corespunzătoare transformărilor $1 \rightarrow 2$, respectiv $2 \rightarrow 3$. Pentru transformarea $1 \rightarrow 2$ se poate scrie:

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2}{T} = \text{const.} &\Rightarrow \frac{m^2}{V^2 T} = \text{const.} \Rightarrow V^2 T = \text{const.} \Rightarrow T = \frac{\text{const.}}{V^2} \\ pV = \nu R T &= \nu R \frac{\text{const.}}{V^2} = \frac{\text{const.}}{V^2} \Rightarrow pV^3 = \text{const.} \end{aligned}$$

Prin urmare, aceasta este o transformare politropă, pentru care indicele politropic este $n = 3$. Analog, pentru transformarea $2 \rightarrow 3$:

$$\begin{aligned} \rho^2 = \frac{a}{T} &\Rightarrow a = \rho^2 T = \frac{m^2}{V^2} T \Rightarrow T = \frac{a}{m^2} V^2 \\ pV = \nu R T &= \nu R \frac{a}{m^2} V^2 = \text{const.} V^2 \Rightarrow \frac{p}{V} = \text{const.} \Rightarrow pV^{-1} = \text{const.} \end{aligned}$$

deci transformarea este o transformare politropă, pentru care indicele politropic este $n = -1$.

În cele ce urmează, se va determina expresia căldurii molare într-o transformare politropă, în funcție de indicele politropic, indicii 1 și 2 folosiți fiind asociați stărilor inițială, respectiv finală.

$$pV^n = \text{const.} \Rightarrow p(V) = \frac{\text{const.}}{V^n} = \text{const.} \cdot V^{-n} = p_1 V_1^n V^{-n}$$

Pentru aceasta, se va folosi expresia matematică a primului principiu al termodinamicii:

$$Q = L + \Delta U \Rightarrow \nu C \Delta T = L + \nu C_V \Delta T$$

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 p dV = \int_1^2 p_1 V_1^n V^{-n} dV = p_1 V_1^n \int_1^2 V^{-n} dV = p_1 V_1^n \left. \frac{V^{-n+1}}{-n+1} \right|_1^2 = \frac{p_1 V_1^n}{1-n} (V_2^{1-n} - V_1^{1-n}) \\ L &= \frac{p_1 V_1^n V_2^{1-n} - p_1 V_1^n V_1^{1-n}}{1-n} \end{aligned}$$

și se va ține cont de faptul că (legea transformării politrope):

$$p_1 V_1^n = p_2 V_2^n$$

obținându-se:

$$L = \frac{p_2 V_2^n V_2^{1-n} - p_1 V_1^n V_1^{1-n}}{1-n} = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{1-n} = \frac{\nu R (T_2 - T_1)}{1-n} = -\frac{\nu R \Delta T}{n-1}$$

Făcând înlocuirile:

$$\nu C \Delta T = -\frac{\nu R \Delta T}{n-1} + \nu C_V \Delta T \Rightarrow C = C_V - \frac{R}{n-1}$$

Se pot calcula acum căldurile molare în transformările $1 \rightarrow 2$, respectiv $2 \rightarrow 3$ ¹:

¹ - pentru gazul ideal monoatomic: $C_V = \frac{3}{2} R$, $C_P = \frac{5}{2} R$, pentru gazul ideal biatomic: $C_V = \frac{5}{2} R$, $C_P = \frac{7}{2} R$, pentru gazul ideal poliatomic:

$C_V = 3R$, $C_P = 4R$

$$C_{12} = C_V - \frac{R}{3-1} = \frac{3}{2}R - \frac{R}{2} = R$$

$$C_{23} = C_V - \frac{R}{-1-1} = \frac{3}{2}R + \frac{R}{2} = 2R$$

iar căldurile schimbate de sistemul termodinamic cu mediul exterior devin:

$$Q_{12} = \nu C_{12} T_1 = \nu R T_1$$

$$Q_{23} = 4\nu R T_1$$

Rezultă randamentul cerut:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_{acc}} = 1 - \frac{\frac{9}{2}\nu R T_1}{\nu R T_1 + 4\nu R T_1} = \frac{5\nu R T_1 - \frac{9}{2}\nu R T_1}{5\nu R T_1} = \frac{\nu R T_1}{10\nu R T_1} = 0,1 = 10\%$$

CONCLUZII

A fost propusă o problemă de fizică al cărei grad de dificultate a fost dat de prezența mai multor transformări politrope, a căror lege particulară a trebuit determinată, împreună cu căldura molară corespunzătoare.

Din punctul de vedere al fizicii, au fost necesare cunoștințe privind reprezentarea transformărilor la care ia parte gazul ideal în diverse coordonate și interpretarea acestora astfel încât să se poată deduce legea transformării respective. Dificultatea problemei a constat în faptul că sistemul de coordonate oferit de textul problemei a fost (ρ^2, T) , puțin neobișnuit dacă se ia în considerare faptul că de regulă se folosește sistemul Clapeyron-Mendeleev (p, V) sau cele derivate din acesta, (V, T) sau (p, T) . De asemenea, au fost utilizate cunoștințe privind energia internă a gazului ideal, randamentul unui motor termic ce funcționează după un ciclu termodinamic dat, căldura molară a gazului ideal și căldura schimbată cu mediul exterior într-o transformare dată și lucrul mecanic. Nu în ultimul rând, este necesară identificarea și utilizarea corectă a legilor transformărilor care apar în situația dată de problemă.

Din punct de vedere metodic, este foarte importantă păstrarea firului logic de rezolvare a problemei, care facilitează efectuarea și succesiunea calculelor. Se obține astfel o rezolvare „curată”, ușor de urmărit și, pentru că este vorba despre o problemă dată la un concurs, ușor de evaluat.

Se poate evidenția, prin urmare, necesitatea unei bune cunoașteri științifice și a unei gândiri critice și structurate în timpul rezolvării sarcinilor de lucru, pentru a ajunge la răspunsurile corecte aceasta fiind, nu-i așa, dorința oricărui rezolvator de probleme!

BIBLIOGRAFIE

- [1] Anacleto J. (2023). *Thermal capacities and polytropic processes*, Eur. J. Phys.
- [2] Anghel T. (2017). *Transformarea politropă a gazului ideal (I)*, revista Evrica! Nr. 2, , https://ibn.idsi.md/sites/default/files/imag_file/13_15_Transformarea%20politropa%20a%20gazului%20ideal%20%28I%29.pdf
- [3] Căpitanu, C.D. (2014), *Didactica fizicii*, Editura Universității din Oradea, Oradea
- [4] Mantea C., Garabet, M. (2005), *Fizică: manual pentru clasa a X-a*, Editura All, București
- [5] Moradpour, H., Abri, A., Ebadi, H., (2015), *Thermodynamic behavior and stability of polytropic gas*, International Journal of Modern Physics D, pp. 1-7
- [6] Sbârciog C. (2007), *Subiecte de fizică*, Vol. 1, Editura Universității din Oradea, Oradea
- [7] *** Ministerul Educației, Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație, Concursul național de ocupare a posturilor didactice/catedrelor declarate vacante/rezervate în unitățile de învățământ preuniversitar, 12 iulie 2023, varianta 3

CONSIDERENTE PRIVIND EVOLUȚIA ASTIGMATISMULUI LA PERSOANE TINERE

Denisa-Larisa-Carina POP¹, Carmen-Daniela CĂPITANU²

¹Student FETB, Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe, denisa.carinaa@yahoo.com

²Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe, Departamentul de Fizică, c.carmen.d@gmail.com

Rezumat: Ochiul uman este un sistem cu un design optic complex, fiind alcătuit în esență din două elemente refractive: corneea și cristalinul. Ambele posedă putere optică pozitivă, ceea ce face ca ochiul ca un întreg să aibă o putere de focalizare mai mare decât a oricăruia din elementele sale. O categorie complexă de probleme de focalizare a ochiului des întâlnită în practica oftalmologică curentă este astigmatismul miopic compus, în care corneea prezintă neuniformități ale convergenței, la care se adaugă anomaliile de focalizare datorate cristalinului sau lungimii axiale a ochiului. Lucrarea de față urmărește și discută evoluția în timp a stării refractive a ochilor unei persoane începând cu preadolescența acesteia și terminând cu vârsta de adult tânăr, acoperind un interval de timp de nouă ani. Se observă o creștere continuă a necesarului de corecție optică, într-un ritm care nu prezintă probleme deosebite, așa cum se arată în literatura de specialitate.

Cuvinte-cheie: astigmatism miopic compus, meridiane principale, corecție optică

INTRODUCERE

Astigmatismul este o anomalie a funcționării sistemului optic al ochiului și constă în puteri diferite de refracție a razelor de lumină paralele în plane diferite ale acestuia [1]. Nu există un singur punct focal în care se strâng razele de lumină, razele sunt focalizate în diferite puncte pe retină, deci vederea va fi deficitară atât la depărtare, cât și de aproape [3].

Cel mai cunoscut tip de astigmatism este cel corneal, rezultat al unei forme anormale a corneei. Astigmatismul poate avea cauze genetice, dar poate fi produs și de diverși factori anatomici sau de mediu [4]. Nu există un singur model sau o teorie unică ce să explice geneza astigmatismului. [5, 7]

Există o diferență legată de sexul pacientului în ceea ce privește ochiul astigmat. S-a constatat că bărbații prezintă o grosime corneală mai mare decât femeile, în timp ce femeile au o curbura corneală mai abruptă decât bărbații, ceea ce face ca luarea în considerare a sexului pacienților să fie importantă atunci când se stabilesc valorile „medii” ale ochiului [3, 6, 7].

Apariția astigmatismului de minim 1D variază de la 30% în perioada neonatală la 50% în copilărie, prezentând un maxim de 60% între 1,5 și 2,5 ani și descrește la 20-40% la copiii de 5 ani, tendința de descreștere menținându-se și ajungând la 12-13% la copiii de vârstă școlară [8]. Pe baza unor observații de durată, se poate concluziona că un copil care nu are astigmatism în copilăria timpurie, nu va dezvolta o astfel de afecțiune, cel puțin nu până la 4-6 ani [3].

Un studiu de durată privind incidența astigmatismului în 960 de copii cu vârste cuprinse între 6 luni și 7 ani, a arătat că până la 3 ani, astigmatismul a scăzut la copii cu astigmatism mare cu până la $-0,37D$ pe an și a rămas stabil la copiii cu astigmatism redus ($+0,05D$ pe an).

Între 3 și 7 ani, astigmatismul a scăzut atât la copiii cu astigmatism mare ($-0,11D$ pe an), cât și la copiii cu astigmatism redus ($-0,03D$ pe an). Datele mai arată și faptul că în cazul copiilor cu vârsta peste 7 ani, cu astigmatism mare, s-a observat o tendință de creștere a acestuia odată cu creșterea în vârstă.

Cu toate că studiile care au urmărit incidența astigmatismului la copii de 12-13 ani sunt puține, s-a observat o dinamică a profilelor astigmatice individuale, ceea ce are o importanță pentru sănătatea publică, întrucât modificarea profilului de astigmatism în copilărie trebuie luată în considerare atunci când se face recomandarea pentru intervalele de timp dintre consultațiile oftalmologice.

Odată cu vârsta, apare o schimbare generală a axei de astigmatism, predominant conform regulii la adulții tineri, la un astigmatism contra regulii la persoanele trecute de 40 de ani. În adolescența timpurie, astigmatismul nu depășește de regulă $1,0D$, iar între 20 și 40 de ani, el este

frecvent și valorile sale sunt scăzute, orientarea axei cilindrului fiind conform regulii. Cu toate acestea, la adulții peste 40 de ani, corneea este mai abruptă în secțiune orizontală, ceea ce contribuie la o incidență mai mare a astigmatismului contra regulii [2, 3].

DISCUȚII PE STUDIUL DE CAZ

A fost studiată evoluția astigmatismului miopic compus al unei persoane pe durata câtorva ani (din 2014 până în 2022), perioadă în care au avut loc schimbări semnificative în dezvoltarea fizică a acesteia și anume trecerea de la adolescență la maturitate.

Evoluția condiției oculare a fost apreciată folosind rețetele oftalmologice obținute în urma unor controale medicale regulate (tabelul 1). Acolo unde a fost posibil, prezentarea cazului a fost însoțită de caracterizarea lentilelor cu ajutorul cărora au fost confecționați ochelarii corectori, conform rețetelor prescrise.

Tabelul 1. Evoluția condiției oculare a pacientului cuprins în studiul de caz

Nr. crt.	Data consultație	Vârstă (ani)	OD			OS			Distanță pupilară (mm)
			Sph.	Cyl.	Ax	Sph.	Cyl.	Ax	
1	Martie 2014	13	-1,50	-0,50	25°	-2	-1,25	175°	63
2	Iunie 2014	14	-1,75	-0,50	20°	-2,50	-1,25	180°	60
3	Ianuarie 2015	14	-2,00	-1,00	25°	-2,75	-1,00	5°	63
4	August 2015	15	-2,00	-0,75	15°	-2,50	-0,75	180°	63
5	Mai 2017	17	-3,00	-0,75	2°	-3,50	-0,75	170°	63
6	August 2020	20	-3,00	-1,25	20°	-3,50	-1,00	170°	64
7	Iulie 2021	21	-3,00	-1,50	25°	-3,50	-1,50	175°	64
8	Mai 2022	22	-3,25	-1,50	20°	-3,75	-1,50	170°	64

Consultațiile oftalmologice din perioada 2014-2015 au fost efectuate în cadrul aceleiași unități medicale, dar la medici diferiți, ceea ce poate explica anumite diferențe cum ar fi aprecierea distanței pupilare (60 mm pe o singură rețetă, 63 mm pe celelalte rețete) și fluctuațiile de putere cilindrică (o creștere de la -0,50 la -1,00 și apoi o scădere la -0,75 dioptrii).

În tabelele 2 și 3 sunt prezentate puterile optice pe meridianele principale ale ochiului pentru ochiul drept, respectiv cel stâng.

Tabelul 2. Puterile optice pe meridianele principale ale ochiului drept

Data	Scriere cilindri încrucișați	Meridianul la 25°/20°/15°	Meridianul la 115°/110°/105°
martie 2014	-2,00 × 25° / -1,50 × 115°	-1,50 dioptrii	-2,00 dioptrii
iunie 2014	-2,25 × 20° / -1,75 × 110°	-1,75 dioptrii	-2,25 dioptrii
ianuarie 2015	-3,00 × 25° / -2,00 × 115°	-2,00 dioptrii	-3,00 dioptrii
august 2015	-2,75 × 15° / -2,00 × 105°	-2,00 dioptrii	-2,75 dioptrii
mai 2017	-3,75 × 20° / -3,00 × 110°	-3,00 dioptrii	-3,75 dioptrii
august 2020	-4,25 × 20° / -3,00 × 110°	-3,00 dioptrii	-4,25 dioptrii
iulie 2021	-4,50 × 25° / -3,00 × 115°	-3,00 dioptrii	-4,50 dioptrii
mai 2022	-4,75 × 20° / -3,25 × 110°	-3,25 dioptrii	-4,75 dioptrii

Tabelul 3. Puterile optice pe meridianele principale ale ochiului stâng

Data	Scriere cilindri încrucișați	Meridianul la 85°/90°/95°	Meridianul la 175°/180°/5°/0°
martie 2014	-2,00 × 85° / -3,25 × 175°	-3,25 dioptrii	-2,00 dioptrii
iunie 2014	-2,50 × 90° / -3,75 × 180°	-3,75 dioptrii	-2,50 dioptrii
ianuarie 2015	-3,75 × 5° / -2,75 × 95°	-3,75 dioptrii	-2,75 dioptrii

august 2015	$-3,25 \times 0^\circ / -2,50 \times 90^\circ$	$-3,25 \text{ dioptrii}$	$-2,50 \text{ dioptrii}$
mai 2017	$-3,50 \times 85^\circ / -4,25 \times 175^\circ$	$-4,25 \text{ dioptrii}$	$-3,50 \text{ dioptrii}$
august 2020	$-3,50 \times 80^\circ / -4,50 \times 170^\circ$	$-4,50 \text{ dioptrii}$	$-3,50 \text{ dioptrii}$
iulie 2021	$-3,50 \times 85^\circ / -5,00 \times 175^\circ$	$-5,00 \text{ dioptrii}$	$-3,50 \text{ dioptrii}$
mai 2022	$-3,75 \times 80^\circ / -5,25 \times 170^\circ$	$-5,25 \text{ dioptrii}$	$-3,75 \text{ dioptrii}$

CONCLUZII

În cazul ochiului drept, se observă o creștere continuă a necesarului de corecție optică pe meridianul de 110° pe parcursul celor 9 ani, de aproape 3 *dioptrii* (2,75 *dioptrii*) negative, fără variații semnificative ale axului. Același lucru se observă și pe meridianul celălalt, dar cu un ritm de creștere mai lent, fiind prezentă chiar și o stagnare pentru o perioadă de 4 ani, la 3 *dioptrii* negative.

Pe fondul unei evoluții lente a astigmatismului în ultimii doi ani de studiu, dinamica schimbărilor care apar pe meridianele se poate pune pe seama evoluției puțin mai accentuate a miopiei (tabelul 4).

Tabelul 4. Discuția evoluției puterii optice pe meridianele principale pentru ochiul drept

Data	Observații
martie 2014	
iunie 2014	- creștere ușoară a necesarului de corecție pe ambele meridianele - luând în considerare intervalul de numai trei luni de la controlul anterior, modificarea poate fi considerată importantă, dar poate fi pusă și pe seama faptului că acesta a fost realizat în altă unitate medicală, cu altă aparatură, de către o altă persoană
ianuarie 2015	- creștere a corecției în luni pe ambele meridianele - astigmatism miopic compus în evoluție
august 2015	- regres al necesarului de corecție pe meridianul la 105° , care nu poate fi interpretat în context
mai 2017	- stagnare a corecției pe meridianul de 20° (25°), care poate fi pusă pe seama evoluției miopiei, care face să crească necesarul pe celălalt meridian; astigmatismul nu evoluează
august 2020	
iulie 2021	
mai 2022	
	- evoluție ușoară pe ambele meridianele

În ceea ce privește ochiul stâng, se observă o creștere continuă a necesarului de corecție optică pe meridianul de 90° pe parcursul celor 9 ani, de 2 *dioptrii* negative, fără variații semnificative ale axului. Același lucru se observă și pe meridianul celălalt, dar cu un ritm de creștere mai lent, fiind prezentă chiar și o stagnare pentru o perioadă de 4 ani, la 3,50 *dioptrii* negative.

Pe fondul evoluției lente a astigmatismului în ultimii doi ani de studiu, dinamica schimbărilor care apar pe meridianele se poate pune pe seama evoluției puțin mai accentuate, a miopiei (tabelul 5).

Tabelul 5. Discuția evoluției puterii optice pe meridianele principale pentru ochiul stâng

Data	Observații
martie 2014	
iunie 2014	- creștere a necesarului de corecție pe ambele meridianele, semnificativă dacă se raportează la intervalul de timp considerat (trei luni)
ianuarie 2015	- stagnare a necesarului pe meridianul de 90° și ușoară creștere pe meridianul celălalt - se poate interpreta ca evoluție foarte lentă a astigmatismului, respectiv o evoluție ceva mai pronunțată a miopiei
august 2015	- regres al necesarului de corecție pe ambele meridianele, care nu poate fi interpretat în context
mai 2017	- stagnare a corecției pe meridianul de 180° (0°), care poate fi pusă pe seama evoluției miopiei, care face să crească indicațiile pe meridianul perpendicular; astigmatismul nu evoluează
august 2020	
iulie 2021	
mai 2022	
	- evoluție ușoară pe ambele meridianele

Rezultatele măsurărilor oculare, reflectate în rețetele prescrise, efectuate după anul 2017, arată o evoluție a miopiei din 2015 până în 2017 (de la $-2,00$ dioptrii la $-3,00$ dioptrii pentru ochiul drept, respectiv de la $-2,50$ dioptrii la $-3,50$ dioptrii la ochiul stâng), situație care se încadrează în tiparele de evoluție a miopiei pentru această vârstă. Urmează apoi o perioadă de trecere de la adolescență la statutul de adult tânăr, când se cunoaște din literatura de specialitate că creșterea miopiei începe să stagneze sau să se manifeste foarte lent. Astfel, după anul 2017 se observă o perioadă de aproximativ 4 ani în care miopia nu se modifică ($-3,00$ dioptrii pentru ochiul drept și $-3,50$ dioptrii pentru cel stâng), după care se manifestă o ușoară creștere cu câte $-0,25$ dioptrii la ambii ochi.

Comparația se susține, consultațiile oftalmologice desfășurându-se la același medic, la aceeași unitate sanitară.

În ceea ce privește evoluția astigmatismului, este clară o evoluție foarte ușoară a acestuia, la ambii ochi, pentru întreaga perioadă inclusă în studiu. Se observă că o creștere a acestuia, mai mare la ochiul drept (cu o dioptrie negativă, față de $0,25$ dioptrii negative la ochiul stâng), lucru care, și el, se încadrează în tiparele generale de evoluție descrise în literatura de specialitate.

Diferențele care apar la aprecierea axului, pentru întreaga perioadă supusă studiului, se situează în jurul valorii de 5° , ceea ce se interpretează ca fiind neglijabil.

Se observă o ușoară creștere a distanței pupilare în perioada 2017-2022 față de perioada, 2014-2017. Aceasta se corelează cu transformările fizice la care este supus pacientul la vârstele corespunzătoare, el trecând de la preadolescență la începutul studiului la maturitate (adult tânăr).

BIBLIOGRAFIE

- [1] Căpitanu C.D., *Ametropii asferice*, Editura Pro Universitaria, București, 2021
- [2] McCarty C.A., Livingston P.M., Taylor H.R., (1997), *Prevalence of myopia in adults: implications for refractive surgeons*. J. Refract. Surg.; Vol.13, pp. 229–34
- [3] Gawlak M., Czarnacka K., Chmura A., Pandey A., Gugnowska J., Kruszyńska A., Cwalina O., Sajak-Hydzik K., Pawlicka I., Kozak M. (2022), *Change in corneal astigmatism with age*, Ophthalmotherapy, Vol. 9/Nr. 2(34), pp.85-89
- [4] Grey C., Ya, M., (1986). *Influence of lid position on astigmatism*, Am. J. Optom. Physiol. Opt. Vol.63, pp. 966–9
- [5] Read S.A., Collins M.J., Carney L.G. (2007), *The influence of eyelid morphology on normal corneal shape*, Invest Ophthalmol. Vis. Sci., Vol. 48(1), pp. 112-119
- [6] Wang Q., Liu W., Wu Y., Ma Y., Zhao G. (2017), *Central corneal thickness and its relationship to ocular parameters in young adult myopic eyes*, Clinical and Experimental Optometry, Vol. 100, pp.250-254
- [7] Yang Z., Lu Z., Shen Y., Chu T., Pan X., Wang C., Wang J. (2022) *Prevalence of and factors associated with astigmatism in preschool children in Wuxi City, China*, BMC Ophthalmology, Vol. 22, pp.146

APLICAȚIE DE VIZUALIZARE A IMAGINILOR DICOM

Florina Ioana SELEGEAN¹, Pașcu Cătălin MOCA²

¹Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe, student anul I Fizica Explorărilor și Terapiilor Biomedicale

²Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe, Departamentul de Fizică

Rezumat. Acest articol prezintă dezvoltarea unei aplicații pentru vizualizarea fișierelor DICOM, utilizând platforma Matlab AppDesigner. Obiectivul principal a fost crearea unei interfețe intuitive pentru manipularea și analizarea imaginilor medicale.

Cuvinte cheie: DICOM, imagistică medicală, programare

INTRODUCERE

DICOM — Digital Imaging and Communications in Medicine — este standardul internațional pentru imagini medicale și informații aferente. Acesta definește formatele pentru imaginile medicale care pot fi schimbate cu datele și calitatea necesare utilizării clinice. Standardul DICOM a fost creat pentru a facilita schimbul de informații medicale între dispozitive și sisteme din domeniul sănătății. Prin utilizarea acestui standard, se asigură că imaginile medicale pot fi vizualizate și interpretate corect de către diferiți profesioniști în domeniul medical, iar acest lucru joacă un rol crucial pentru diagnosticarea corectă a pacienților și pentru furnizarea de servicii de calitate.

DICOM este implementat într-o gamă variată de echipamente medicale, cum ar fi cele folosite în radiologie, imagistică cardiologică și radioterapie (razele X, CT, RMN, ultrasunet, etc), totodată fiind mai prezent în dispozitive utilizate în alte specializări medicale, precum oftalmologia și stomatologia. Având în vedere că există sute de mii de echipamente de imagistică medicală în funcțiune, standardul DICOM reprezintă unul dintre cele mai extinse standarde de comunicare din domeniul sănătății la nivel global.[1]

DICOM folosește un limbaj propriu, bazat pe modelul său al lumii reale cunoscut ca modelul de informații DICOM. Acest model vede toate datele din lumea reală - pacienți, studii, dispozitive medicale - sunt văzute ca obiecte cu proprietăți sau attribute corespunzătoare.

Pentru a standardiza definițiile acestor obiecte și attribute, DICOM utilizează Definițiile de Obiecte de Informații DICOM (IODs). Aceste IOD-uri sunt colecții de attribute, care descriu proprietățile specifice fiecărui obiect. De exemplu, un IOD de pacient, poate fi descris prin numele pacientului, ID-ul, sexul, vârsta, greutatea și așa mai departe - toate informațiile relevante clinic despre pacient. Un pacient, la fel ca orice alt obiect DICOM, este mulțimea de attribute din care este alcătuit, așa cum se poate vedea în Figura 8. DICOM menține o listă cu peste 2.000 attribute standard, cunoscute sub numele de Dicționar de Date DICOM, pentru a asigura consistența în denumirea atributelor, formatare și procesare.[2]

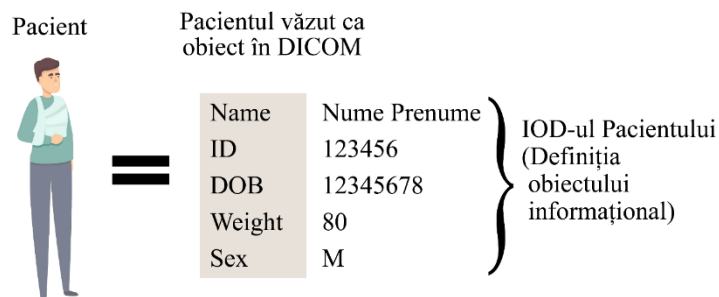


Figura 1. Interfața AppDesigner

În această articol, se propune dezvoltarea unei aplicații Matlab pentru vizualizarea fișierelor DICOM, punând accent pe eficiența și ușurința utilizării în practica medicală. Studiul se concentrează pe implementarea funcțiilor esențiale în Matlab AppDesigner, un instrument puternic pentru dezvoltarea interfețelor grafice.

MATERIALE ȘI METODE

Aplicația de vizualizare a fișierelor DICOM a fost dezvoltată utilizând AppDesigner. AppDesign este un instrument de vizualizare cu ajutorul căruia putem crea cu ușurință programe profesionale datorită interfeței sale prietenoase și relativ ușor de utilizat. Acesta folosește componente vizuale pe modelul *drag and drop* pentru a aranja designul aplicației iar editorului integrat este ușor de utilizat pentru a facilita programarea.

Cu ajutorul AppDesigner putem proiecta și dezvolta rapid aplicații personalizate fără a fi nevoie să scriem un cod pentru o interfață grafică deoarece Matlab-ul generează automat linii de cod pentru elementele grafice. AppDesigner folosește limbajul Matlab, ceea ce înseamnă că putem utiliza toate funcțiile și toolbox-urile incorporate în Matlab. În figura 2 este prezentată interfața AppDesigner cu secțiunile corespunzătoare. [3]

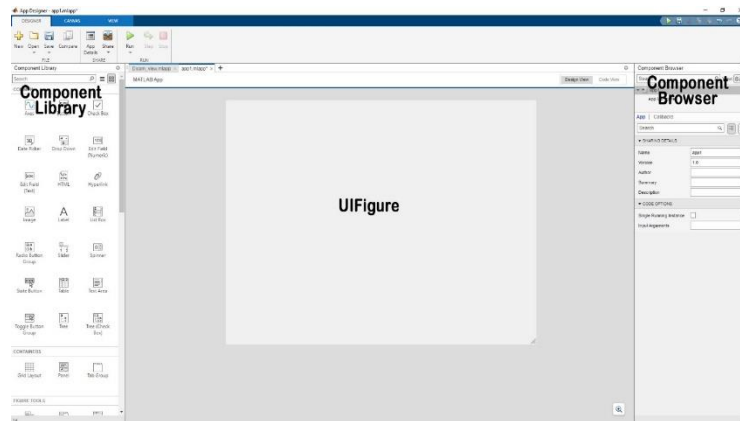


Figura 2. Interfața AppDesigner

Interfața aplicației a fost proiectată astfel încât să fie intuitivă, incluzând componente precum butoane pentru încărcarea fișierelor, casete de bifat pentru afișarea opțiunilor și UIAxes pentru afișarea imaginilor. Aplicația permite utilizatorului să efectueze acțiuni precum zoom, încărcarea imaginilor și selectarea regiunilor de interes (ROI) pentru analiza parametrilor imagistici.

Pentru vizualizarea imaginilor DICOM, s-a utilizat funcția Matlab standard *imshow* care permite afișarea combinarea imaginilor în formate diverse.

REZULTATE ȘI DISCUȚII

Pentru început am conceput interfața grafică prin plasarea elementelor grafice după care am definit comportamentul lor. După cum se poate vedea, la deschiderea aplicației, designul este unul minimalist.

Mai sus, avem un meniu care conține *File* și *Settings*. Apăsând pe butonul File se va deschide un meniu din care putem alege să încărcăm un fișier DICOM sau un folder. Tot din acest meniu putem alege să salvăm imaginea încărcată sub formă de .pdf prin apăsarea *Save as... > Save as .pdf*.



Figura 3. Interfața aplicației

După ce am selectat ce dorim să încărcăm, fișier sau director, imaginea DICOM va apărea în tab-ul VIEWER iar în stânga va apărea un tabel care conține datele din antetul fișierul DICOM.

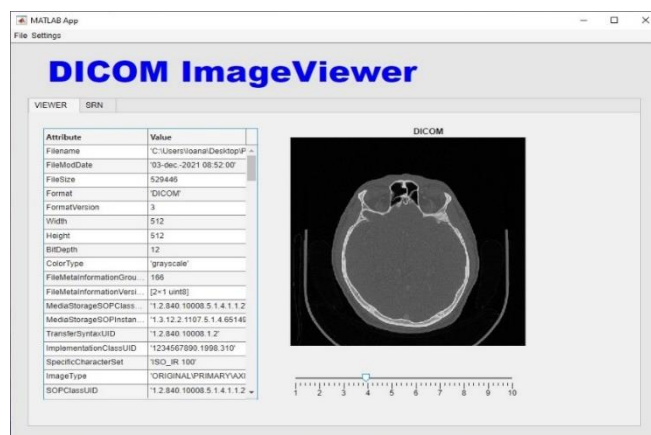


Figura 4. Interfața aplicației în tab-ul Viewer

În următoarea fereastră SRN avem opțiunea de a contura țesutul osos, unde putem calcula și o regiune de interes semnal/zgomot. De asemenea putem să calculăm și distanța între 2 puncte care va fi reprezentată atât în pixeli cât și în centimetri în josul imaginii

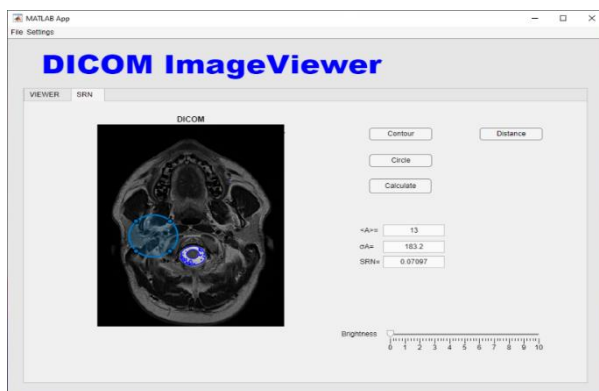


Figura 5 Raport semnal/zgomot calculat

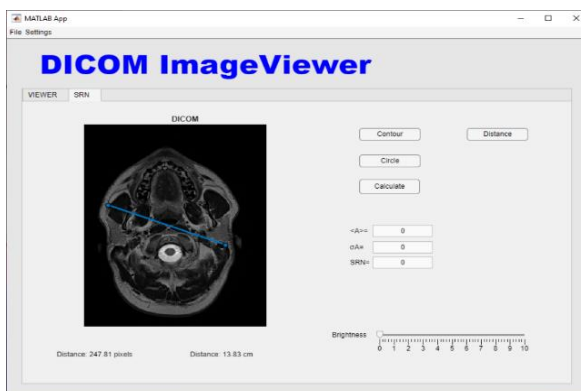


Figura 6 Distanța afișată în pixeli și în centimetri

Funcțiile implementate în program

Dicominfo este una dintre cele mai importante funcții deoarece cu ajutorul acesteia putem să citim informațiile din antetul unui fișier DICOM.

```
>> info = dicominfo("5349945A.dcm");
```

După apelarea acestei funcții, toate informațiile sunt salvate într-o variabilă de tip structură. Mai jos este dezarhivat fișierul DICOM având 163 de câmpuri cu metadate. În tabelul de mai jos prezentăm câteva dintre câmpuri.

Tabelul 1 Datele din antetul fișierului DICOM

Filename:	'/Users/mocap/Dropbox/shared_folders/Florina-Lucrare_licenta/5349945C.dcm'
FileModDate	'03-Dec-2021 08:51:00'
FileSize:	529444
Format:	'DICOM'
FormatVersion:	3
Width:	512
Height:	512
BitDepth:	12
ColorType:	'grayscale'
FileMetaInformationGroupLength:	166

Alta funcție importantă este *dicomread*, cu ajutorul acestei funcții putem extrage datele dintr-o imagine DICOM. Această funcție este specializată în citirea fișierelor care au standardul DICOM dar are și capacitatea de a interpreta și fișiere care nu respectă complet acest standard.

```
>> img = dicomread("5349945A.dcm");
>> imshow(img, []);
```

Dicomwrite este utilizată pentru a scrie o imagine binară, în tonuri de gri sau color a imaginii X într-un fișier. Funcția *dicomwrite* generează un fișier DICOM. Această sintaxă creează un fișier care conține metadatele necesare pentru obiectul de informații (IOD) de captură secundară.

```
>> X = dicomread("CT-MONO2-16-ankle.dcm");
>> dicomwrite(X,"FisierNou");
```

Se scrie imaginea într-un fișier dicom împreună cu metadatele sale. Se folosește funcția *dicominfo* pentru a obține metadatele din fișierul DICOM. În mod implicit, funcția *dicomwrite* verifică dacă atributele metafișierelor din noul fișier sunt conforme cu standardul IOD de captură secundară.

```
>> metadata = dicominfo("CT-MONO2-16-ankle.dcm");
>> dicomwrite(X,"FisierNou",metadata);
```

Funcția *dicomfind* este utilizată pentru indentificarea precisă a locației și valorii corespunzătoare a câmpului de metadate DICOM specificat în parametrul 'atribut' în cadrul structurii de metadate DICOM denumită 'info'. Vom extrage metadatele dintr-un fișier DICOM cu ajutorul funcției *dicominfo*, iar mai apoi vom folosi *dicomfind* pentru căutarea unori elemente de metadate care sunt mai înrădăcinate în structura info.[4]

```
info= dicominfo("5349946F")
Stud = dicomfind(info,"StudyDescription")
Stud =
    1×2 table
      Location      Value
    _____
    {'StudyDescription'} {'Brain'}
```

Introducerea comenzilor callback în MATLAB este esențială pentru dezvoltarea aplicațiilor interactive, cum ar fi interfețele grafice (GUI). Callback-urile sunt funcții care sunt apelate automat ca răspuns la anumite evenimente, cum ar fi apăsarea unui buton sau mișcarea unui cursor.

```

properties (Access = private)
    value
    dicomImage
    dicomImages cell
    currentIndex double = 1
    DICOMInfoTableData cell
    pixelSpacing
    dicomInfoStrings = struct()
end

% Convertim DICOM metadata din structura DICOM în string
function dicomInfoStrings = convertDicomInfoToStrings(~, dicomInfo)
    fields = fieldnames(dicomInfo);
    dicomInfoStrings = cell(length(fields), 2);
    for i = 1:length(fields)
        fieldName = fields{i};
        fieldValue = dicomInfo.(fieldName);
        if ischar(fieldValue)
            valueString = fieldValue;
        elseif isnumeric(fieldValue) || islogical(fieldValue)
            valueString = num2str(fieldValue);
        else
            valueString = 'Unknown type';
        end
        dicomInfoStrings{i, 1} = fieldName;
        dicomInfoStrings{i, 2} = valueString;
    end
end

%Citim imaginea DICOM
[file,path] = uigetfile('*.dcm', 'Select a DICOM file');
if ~isequal(file,0)
    filename = fullfile(path,file);
    app.info = dicominfo(filename);
    app.image = dicomread(app.info);
    app.image_loaded = true;
end

%Încărcăm imaginile DICOM pentru primul tab
%Încărcăm imaginea DICOM și pentru SNR tot din această comandă
if app.image
else
    app.UIAxes.Visible = "on";
    app.UIAxes_2.Visible = "on";
    imshow(app.image, [], 'Parent', app.UIAxes);
    imshow(app.image, [], 'Parent', app.UIAxes_2);
end

% Convertim metadatele din structura DICOM în string
dicomInfoStrings = app.convertDicomInfoToStrings(app.info);

% Update the DICOMInfoTable data
app.DICOMInfoTable.Data = dicomInfoStrings;
app.DICOMInfoTable.Visible = 'on';

```

CONCLUZII

Concluzia acestei lucrări sintetizează explorarea detaliată a MATLAB AppDesigner, a formatelor de fișiere grafice, cu un accent special pe formatul DICOM (Digital Imaging and Communications in Medicine), și culminarea acestui studiu prin dezvoltarea unui program de vizualizare a imaginilor DICOM.

Aplicația dezvoltată permite o manipulare eficientă a imaginilor medicale și a metadatelor asociate, facilitând procese precum încărcarea, vizualizarea, analiza și exportul imaginilor într-un format accesibil. Funcționalitățile incluse, cum ar fi conturarea țesuturilor, măsurarea distanțelor și manipularea metadatelor, contribuie la îmbunătățirea experienței utilizatorului și la suportul oferit în diagnosticare și tratament.

BIBLIOGRAFIE

- [1] <https://www.dicomstandard.org/about>
- [2] Oleg S. Pinykh, Digital Imaging and Communications in Medicine (DICOM)
- [3] <https://ch.mathworks.com/products/matlab/app-designer.html>
- [4] <https://ch.mathworks.com/help/images/dicom-support-in-the-image-processing-toolbox.html>

TOMOGRAFIA PRIN EMISIE DE POZITRONI (PET)

Richard-Natanael URS¹, Adina-Monica TODERAȘ², Alexandru TODERAȘ³

¹Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe, student anul I Fizica Explorărilor și Terapiilor Biomedicale, Oradea, România

²Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică și Științe, Departamentul de Fizică

³Liceul Tehnologic Felix, Sânmartin, profesor

Rezumat: Tehnologia PET-CT combină avantajele tomografiei computerizate (CT) cu cele ale PET, oferind imagini mai clare și o mai bună localizare a leziunilor; revoluționând astfel practica medicală prin diagnostice mai precise și tratamente mai eficiente. Această lucrare se concentrează pe explicarea principiilor fundamentale ale tehnologiei PET și pe modul în care aceasta funcționează ca instrument de imagistică medicală avansată.

Cuvinte cheie: Tehnologia PET-CT

INTRODUCERE

Emisia tomografică de pozitroni (PET) este o metodă inovatoare de imagistică medicală, dezvoltată în anii 1970 datorită contribuțiilor semnificative ale Dr. Michael Phelps și Dr. Micheal Ter-Pogossian în fizica medicală și medicina nucleară. Inițial utilizată ca un instrument de cercetare, PET a devenit esențială în practica medicală modernă. În ultimii 10 ani, utilizarea PET în clinici a crescut considerabil, în mare parte datorită deciziei CMS (Centrul pentru Servicii Medicale) din 1995 de a rambursa serviciile PET pentru perfuziile miocardice. În 1998, CMS a extins rambursarea pentru evaluările PET ale nodulilor pulmonari solitari și stadiilor incipiente ale cancerului pulmonar, ceea ce a marcat o etapă crucială în utilizarea clinică a PET. Dispozitivele PET-CT hibride sunt considerate vârful de excelență în scanarea PET și se estimează că vor domina piața, reprezentând 90% din vânzări. Evoluția PET și utilizarea sa frecventă în imagistica cancerului, bolilor cardiace și neurologice au dus la dezvoltarea unor instrumente avansate de măsurare, cu un impact semnificativ asupra îngrijirii medicale.

Tehnologia PET-CT combină avantajele tomografiei computerizate (CT) cu cele ale PET, oferind imagini mai clare și o mai bună localizare a leziunilor, revoluționând astfel practica medicală prin diagnostice mai precise și tratamente mai eficiente. Această lucrare se concentrează pe explicarea principiilor fundamentale ale tehnologiei PET și pe modul în care aceasta funcționează ca instrument de imagistică medicală avansată. Vom explora aspectele tehnice și științifice ale emisiei tomografice de pozitroni, evidențiind mecanismele prin care substanțele radioactive sunt utilizate pentru a detecta activitatea metabolică anormală în organism. În acest articol vom explora aspectele tehnice și științifice ale emisiei tomografice de pozitroni, evidențiind mecanismele prin care substanțele radioactive sunt utilizate pentru a detecta activitatea metabolică anormală în organism.

E. Rutherford, în urma experimentelor sale celebre din 1909, a propus un nou model pentru atom, cunoscut sub numele de modelul planetar al atomului. Conform acestui model, atomul este o sferă cu o rază de aproximativ $r = 10^{-10}$ metri, în care sarcina pozitivă este concentrată într-o zonă foarte mică, în centrul atomului, numită nucleu, având o rază de aproximativ $r = 10^{-10}$ metri. Numărul de protoni dintr-un atom se notează cu Z și se numește număr atomic. Dat fiind faptul că atomul este neutru din punct de vedere electric, înseamnă că acesta trebuie să conțină un număr egal de sarcini electrice pozitive și negative. Particulele încărcate cu sarcină pozitivă se numesc protoni, și se notează cu p^+ , iar particulele încărcate cu sarcină negativă se numesc electroni (e^-).

Masa atomilor și a particulelor constituente se determină prin metoda numită spectroscopie de masă. Metoda constă în măsurarea devierii suferite de particulele încărcate cu sarcină electrică în câmpuri electrice și magnetice uniforme. Datorită dimensiunilor extrem de mici ale maselor atomice în comparație cu unitatea de măsură standard pentru masă, kilogramul (kg), s-a decis ca unitatea de măsură pentru masele atomice să fie unitatea atomică de masă, notată cu u . Aceasta este egală cu a 12-a parte din masa izotopului de carbon 12, $\mu_{12}^C = 12\text{kg}$.

$$u = \frac{1}{12} \cdot \frac{\mu_{^{12}_6\text{C}}}{N_A} = \frac{1}{12} \cdot \frac{12}{6,023 \cdot 10^{26}} \cong 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

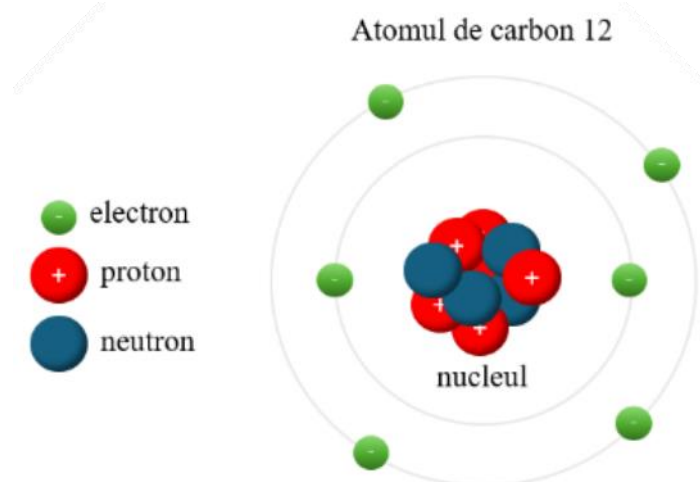


Figura 1. Structura atomului

Numărul întreg, cel mai apropiat de masa atomică, exprimat în unități atomice de masă, se numește *număr de masă*, și se notează cu A . Masa unui atom este diferită de masa nucleului său. Masa totală a unui atom include atât masa nucleului, cât și masa celor Z electroni. În domeniul fizicii nucleare, se utilizează conceptul de masă izotopică. Masa izotopică reprezintă masa relativă exactă a unui nucleu având un A și Z dat.

Radioactivitatea este un fenomen natural prin care anumite nuclee atomice instabile se dezintegrează spontan, transformându-se în alte nuclee și eliberând radiații în timpul acestui proces. Aceste radiații pot fi sub formă de particule încărcate electric sau sub formă de radiație electromagnetică. Procesul de dezintegrare nucleară poate avea loc în mod spontan într-un atom instabil, cunoscut și sub numele de izotop radioactiv. Radioactivitatea este o proprietate intrinsecă a anumitor tipuri de atomi și este determinată de compoziția lor nucleară. Atomi care prezintă această instabilitate sunt supuși unui proces numit dezintegrare radioactivă, care poate fi influențat de o varietate de factori, cum ar fi temperatura, presiunea și compoziția chimică.[1]

Dezintegrarea radioactivă este un proces prin care nucleul unui atom instabil își transformă structura prin emiterea de radiații, ceea ce duce la o schimbare în compoziția sa atomică. Acest proces are loc spontan și nu poate fi oprit sau controlat. Acest proces este foarte important în fizica medicală, mai ales în contextul imagisticii prin tomografie cu emisie de pozitroni (PET). În cadrul acestei tehnici, substanțele radioactive, cunoscute sub numele de radiofarmaceutice, sunt administrate pacienților. Acestea emit pozitroni prin dezintegrarea beta plus, iar interacțiunea acestora cu electronii din țesutul corpului generează radiații gamma.

Dezintegrarea α este o dezintegrare radioactivă prin intermediul căreia un nucleu atomic instabil ajunge la stabilitate prin expulzarea, spontană, a unei particule α , care este formată dintr-un nucleu de heliu, adică din doi protoni și doi neutroni. Atomul, prin dezintegrare, se transformă într-un atom care are numărul de masă A cu 4 mai mic și numărul atomic Z cu 2 mai mic.

Dezintegrarea β este un proces de dezintegrare radioactivă în care un nucleu atomic instabil emite un electron sau un pozitron împreună cu o particulă neutrino pentru a ajunge la stabilitate. Acest fenomen apare atunci când forțele nucleare slabe devin mai puternice decât forțele electromagnetice care mențin particulele împreună. Există două tipuri principale de dezintegrare beta: dezintegrarea beta minus (β^-) și dezintegrarea beta plus (β^+). În timpul dezintegrării β^- , un neutron din nucleu se transformă într-un proton și este emis un electron, împreună cu un antineutrino electronic. Antineutrino-ul electronic este o particulă neutrino, care are o masă foarte mică și o sarcină electrică zero. Această dezintegrare apare atunci când numărul de neutroni este mai mare decât cel al protonilor într-un nucleu. Spre deosebire de dezintegrarea β^- , în cadrul dezintegrării β^+ un proton din nucleul unui atom se transformă într-un neutron, emițând un pozitron

(denumit și antielectron) și un neutrino electronic. Aceasta apare atunci când un nucleu are un exces de protoni în comparație cu neutronii, iar conversia unui proton într-un neutron ajută la obținerea unei configurații mai stabile.

Dezintegrarea γ este un proces fizic prin care un nucleu atomic excitat emite radiație gama pentru a ajunge la o stare stabilă. Acest tip de dezintegrare apare adesea după alte forme de dezintegrare nucleară, precum dezintegrările α și β . În urma dezintegrării γ este emisă radiație gama, aceasta fiind un flux de fotoni, o radiație electromagnetică, cu o lungime de undă (λ) foarte scurtă și o energie mare. Interacțiunea radiației γ cu mediul este un proces complex și poate implica mai multe fenomene precum: efectul fotoelectric, efectul Compton și formarea de perechi.

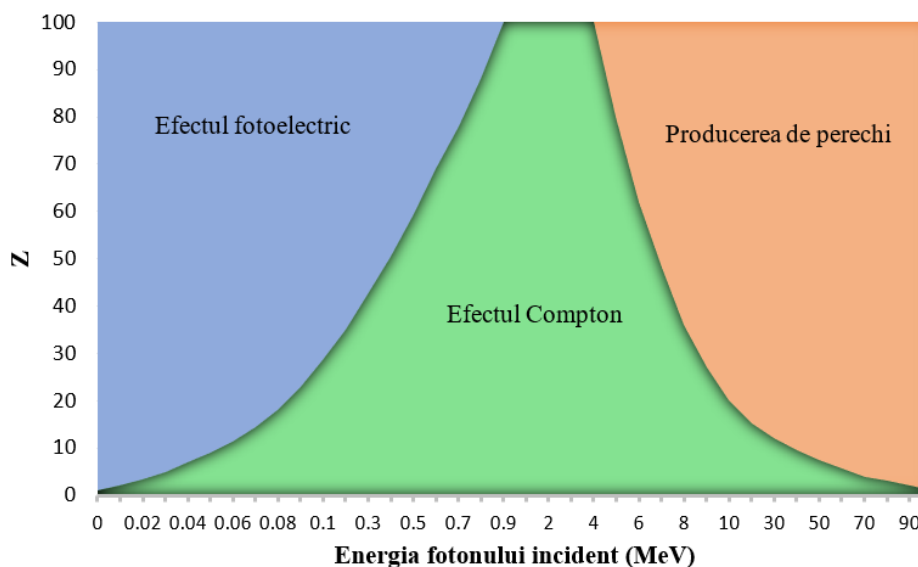


Figura 2. Probabilitatea de apariție a efectelor: fotoelectric, Compton și al produceri de perechi

Reacția de anihilare reprezintă emisia de pozitroni este un proces cunoscut și sub numele de dezintegrare beta plus (dezintegrare β^+), sau dezintegrare izobarică, în care un proton se transformă într-un neutron prin eliberarea unui pozitron și a unui neutrino. Acest proces de dezintegrare este caracteristic radioizotopilor bogăți în protoni. Utilizarea dezintegrării prin pozitroni va rezulta în formarea unui element cu un număr atomic mai mic cu o unitate. Acest proces este cunoscut sub numele de transmutare nucleară, unde un izotop sau element este transformat în altul. Astfel, procesul de dezintegrare izobarică va păstra același număr de masă pentru nucleele fiice, dar numărul atomic va fi modificat. Există două posibilități care pot apărea în urma descompunerii izobarice a unui radioizotop bogat în protoni:

– Producere de pozitroni: $p \rightarrow n + \beta^+ + \nu$ (1)

– Captare de electroni: $p + e^- \rightarrow n + \nu$ (2)

Există radionuclizi bogăți în protoni care sunt capabili să absoarbă electronul din stratul intern, unde va avea loc conversia protonului în neutron. Energie minimă care trebuie să existe pentru ca emisia de pozitroni să fie posibilă este de 1,022 MeV. Captura electronică va reprezenta modul obișnuit de descompunere. Emisia de pozitroni este comună în nucleele cu greutate atomică mai mică precum ^{11}C , ^{13}N , ^{15}O și ^{18}F , pe când captura electronică este observată la nucleele mai grele precum iodul-123.

Pozitronul este capabil să se deplaseze pe distanțe foarte scurte și este considerat că are o energie de tranziție de 1,022 MeV. În timpul deplasării pozitronului, norii de electroni din materialele înconjurătoare vor fi atrași de acesta, iar împreună cu un electron, vor forma pozitroniul, care este un sistem instabil compus dintr-un electron și un pozitron. Aceste componente se vor anihila reciproc în fracțiuni de secundă, aproximativ 125 de picosecunde, pentru a produce doi fotoni de anihilare cu o energie echivalentă de 511 keV. Această energie este echivalentă cu masa combinată a electronului și a pozitronului, și este emisă de obicei în direcții opuse, sub un unghi de 180 de grade.

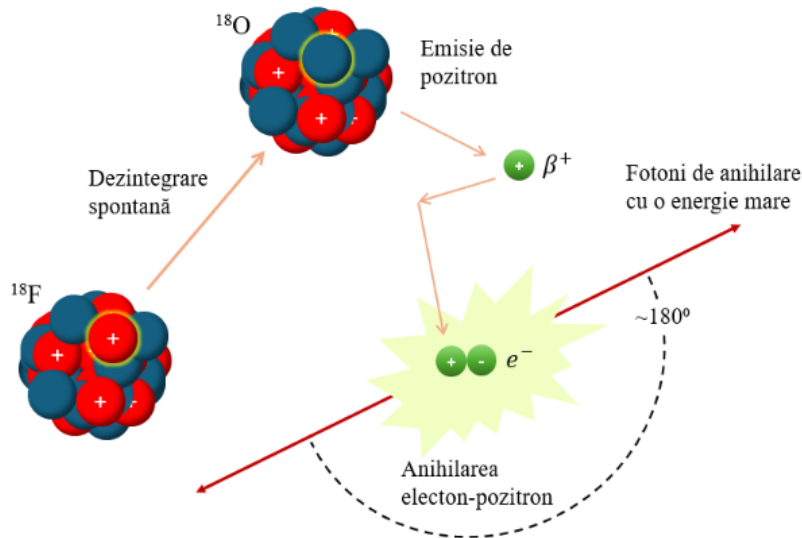


Figura 3. Dezintegrarea fluorului-18 și anihilarea electron-pozitron

Energia celor doi fotoni gamma de 511 keV se poate determina din ecuația lui Einstein pentru echivalența masă-energie, $E=mc^2$. Această ecuație fundamentală din fizică stabilește că energia (E) a unui obiect este echivalentă cu masa (m) sa înmulțită cu pătratul vitezei luminii în vid (c^2).

$$E \cong 9,11 \cdot 10^{-31} kg \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\right)^2 \quad (3)$$

$$E \cong 8,2 \cdot 10^{-14} J \quad (4)$$

Transformând rezultatul în keV vom obține:

$$E \cong \frac{8,2 \cdot 10^{-14} J}{1,6 \cdot 10^{-19} J/eV} \cong 5,11 \cdot 10^5 eV = 511 keV \quad (5)$$

PARTICULARITAȚI ÎN TEHNOLOGIA PET-CT

Dispozitivele hibride PET-CT reprezintă vârful de excelență în ceea ce privește scanarea PET, iar se estimează că sistemele combinate PET-CT vor acapara 90% din totalul vânzărilor de pe piața actuală a PET-urilor. Progresul PET-ului, ca instrument de cercetare, de la primele sale etape până în prezent, utilizat tot mai des în imagistica cancerului, a bolilor cardiace și neurologice, a condus la echiparea cu instrumente de măsurare avansate, ceea ce are un impact semnificativ în domeniul îngrijirii medicale.

Fundamentele imagistici PET se bazează pe proprietățile fizice ale anumitor izotopi radioactivi, cunoscuți sub nume-le de emițători de pozitroni. Acești radionuclizi emit pozitroni, în loc de fotoni gamma, în timpul dezintegrării lor radioactive. Dezintegrarea pozitronilor reprezintă un tip de dezintegrare beta, în care o particulă încărcată pozitiv, numită particulă beta+, este emisă dintr-un nucleu bogat în protoni, pe măsură ce acesta caută să devină mai stabil.[2]

Se pune întrebarea dacă scanerle PET detectează pozitronii. Răspunsul este negativ. Spre deosebire de imagistica convențională în medicina nucleară, care utilizează radionuclizi emițători de raze gamma, fotonii detectați în PET nu provin direct din nucleele care suferă dezintegrarea., astfel pozitronii nu sunt detectați. Deoarece aceștia sunt particule încărcate pozitiv, ei călătoresc doar pe distanțe foarte scurte, de obicei nu mai mult de un milimetru sau doi, înainte de a întâlni un electron încărcat negativ.

Când un pozitron și un electron se ciocnesc, particulele se anihilează, iar conform legii conservării energiei și materiei, anihilarea lor rezultă în crearea a doi fotoni gamma de mare energie, care se deplasează în direcții opuse, la aproximativ 180 de grade unul față de celălalt (Figura 3). Acești fotoni de anihilare de mare energie nu sunt detectați eficient de camerele gamma convenționale, astfel că se utilizează un inel specializat de detectoare. Această detecție simultană folosind

intervale de timp foarte scurte se numește *detecție de coincidență*. Perechile de fotoni care nu ajung la puncte opuse ale inelului detector PET în același timp nu sunt detectate. Acest proces se numește *discriminare* și ajută la îmbunătățirea localizării evenimentelor cu adevărat coincidente.

Energia fiecărui foton coincident produs în urma reacției de anihilare este de aproximativ 511 keV. Detectoarele PET sunt special concepute pentru a gestiona acești fotoni de energie mare. Datorită configurației inelelor, nu este necesară rotirea acestora în obținerea imaginii tomografice.[2,3]

În locul cristalelor tradiționale de iodură de sodiu activată cu Taliiu (NaI(Tl)), detectoarele inelului PET utilizează cristale din compuși precum germanatul de bismut (BGO), ortosilicatul de lutețiu (LSO) sau ortosilicatul de gadoliniu (GSO). Acești compuși sunt selectați de diferiți producători de PET și PET-CT datorită proprietăților lor fizice superioare, care îi fac extrem de adecvați pentru imagistica PET.

Tabelul 1.: Proprietățile cristalelor BGO, LSO, GSO și NaI(Tl) utilizați în PET [3]

Proprietate	BGO	LSO	GSO	NaI(Tl)
Densitate (g/cm ³)	7.13	7.35	6.71	3.67
Lungime de atenuare (cm)	1.1	1.14	1.38	2.5
Eficiența coincidențelor (%)	72	67	56	46
Timp de scintilație (ns)	300	40	50-60	250
Indice de refracție (n)	2.15	1.82	1.87	1.85
Luminiscentă (fotoni/keV)	8-9	30	10	38-40
Mod de achiziție a imaginii	2D sau 3D	3D	3D	2D sau 3D
Emisia maximă (nm)	480	420	430	350

Toate scanerile PET utilizează tehnologia scintilatoare, în care un foton incident interacționează cu detectorul, generând un flash de lumină. Acest flash este detectat de un tub fotomultiplicator sensibil la poziție, aflat în spatele cristalului. Scanerile PET cu inele complete conțin mii de detectoare, oferind o localizare spațială precisă, rezoluția sistemelor fiind limitată de dimensiunea cristalului detector. Detectorul PET ideal ar avea o sensibilitate foarte mare pentru a capta eficient fotonul incident. Ar produce, de asemenea, un flash de lumină scurt și intens (fotofluorescență), permițând o măsurare exactă a energiei și minimizând timpul mort al detectorului.[4]

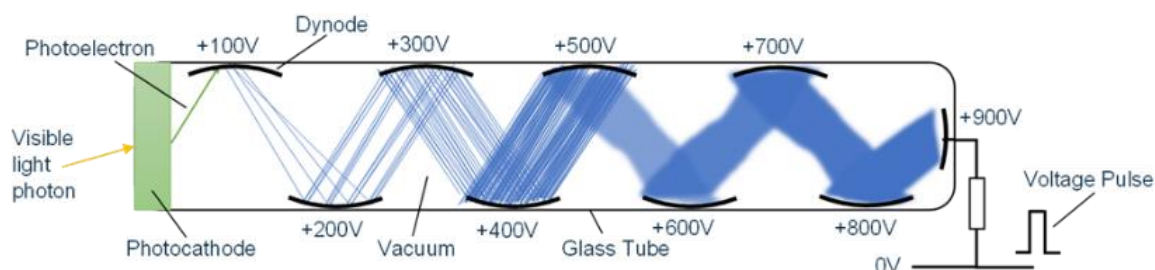


Figura 4. Schema de funcționalitate a PTM-urilor în PET

În prezent, cel mai utilizat **radiofarmaceutic PET** este ¹⁸F-2-fluor-2-deoxi-D-glucoză, cunoscut și sub denumirea de fluorodeoxiglucoză (FDG). FDG prezintă o structură și un comportament biochimic foarte similare cu glucoza. Similaritatea structurală dintre moleculele FDG și glucoză este ilustrată în Figura 5. Chiar dacă diferența între aceste molecule este subtilă, permite obținerea unor informații semnificative în urma unei scanări PET utilizând FDG. Glucoza suferă diverse reacții chimice în celulele corpului, producând apă, dioxid de carbon și, cel mai important, energie. Glicoliza, ciclul Krebs și lanțul de transport al electronilor sunt procese esențiale pentru generarea energiei necesare funcționării celulare. Este important să înțelegem primii pași ai glicolizei, deoarece au legătură directă cu imagistica PET utilizând FDG. Cercetătorii care studiază cancerul au observat că tumorile prezintă o rată glicolică mult mai mare decât țesutul normal. Tumorile au

nevoie de cantități semnificative de energie pentru a susține proliferarea haotică și rapidă a celulelor. FDG, un analog al glucozei, se comportă identic cu glucoza până la un anumit punct (Figura 6). După ce este fosforilat de hexokinază (HK), fosfatul-FDG-6 rămâne prins în celule, deoarece nu este un substrat potrivit pentru fosfataza-glucoză-6.

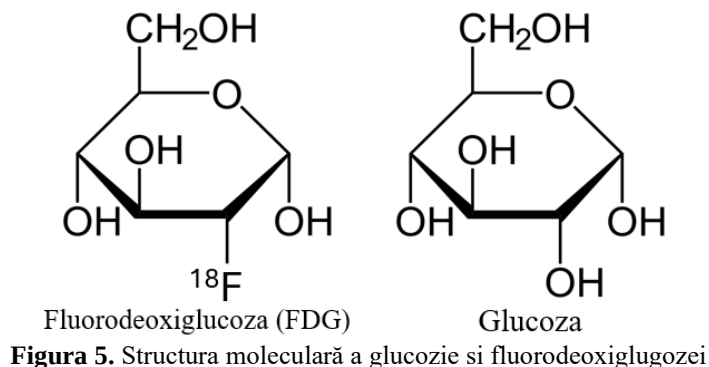


Figura 5. Structura moleculară a glucozei și fluorodeoxiglucozei

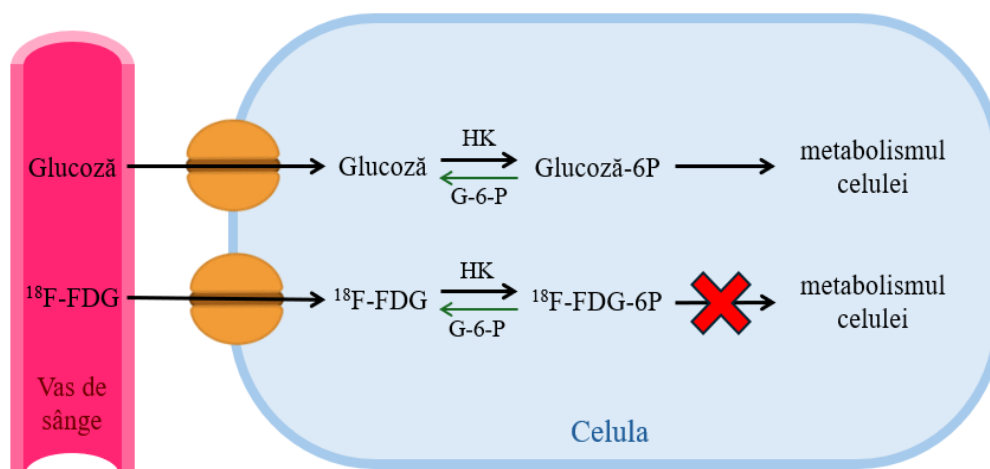


Figura 6. Absorbția și metabolismul celular al glucozei și ^{18}F -FDG

Această captare intensă de glucoză, necesară pentru a satisface cerințele energetice ale celulelor tumorale, permite FDG să se acumuleze în celulele maligne. Astfel, celulele canceroase, având o rată metabolică disproporționat de ridicată comparativ cu celulele normale, captează mai mult FDG. Această caracteristică, combinată cu similitudinea FDG cu glucoza, constituie baza imagisticii tumorilor utilizând FDG în PET.

În Tabelul.3.5 se poate observa că în celulele normale, mitoză este controlată, sinteza ADN-ului este precisă, iar apoptoza este reglementată pentru a menține sănătatea țesuturilor. În contrast, celulele cancerigene se divid rapid și necontrolat, sinteza ADN-ului este defectuoasă, iar apoptoza este evitată, permițând proliferarea necontrolată. Aceste diferențe metabolice fac ca FDG-ul să fie absorbit în cantități mari de celulele canceroase, facilitând detectarea și monitorizarea acestora prin imagistica PET.

Tabelul 2. Comparatie între celula normală și celula anormală

Proces	Celula Normală	Celula Anormală (Cancerigenă)
Mitoza	Diviziune controlată și regulată.	Diviziune necontrolată și rapidă.
Sinteza ADN-ului	Sinteză precisă, cu mecanisme de reparare.	Sinteză accelerată, adesea cu erori genetice.
Apoptoza	Moarte celulară programată reglementată.	Evitarea apoptozei, supraviețuire prelungită.

Co-înregistrarea datelor PET și CT aduce beneficii prin combinarea unităților, fiind mai eficientă decât PET singur în localizarea leziunilor neoplazice și distingerea între acestea și absorbția normală. Fuzionarea datelor PET-CT poate schimba planul de tratament în 20% din cazuri, crescând încrederea și acuratețea diagnosticelor. De asemenea acesta influențează deciziile terapeutice în 14-18% din cazuri și este util în planificarea terapiei cu radiații, biopsii și detectarea recurențelor maligne, îmbunătățind specificitatea mai mult decât sensibilitatea. Examinarea CT corectează atenuarea și reduce timpul total al examinării PET cu 25-30% față de imagistica PET standard, având o rezoluție spațială superioară. Co-înregistrarea datelor PET și CT îmbunătățește semnificativ clasificarea leziunilor. Un alt avantaj este eliminarea surselor radionuclidice, reducând necesitatea înlocuirii periodice. CT poate fi utilizat ca diagnostic în lipsa altor radiografii sau cu doză mică pentru localizare și atenuare.[4]

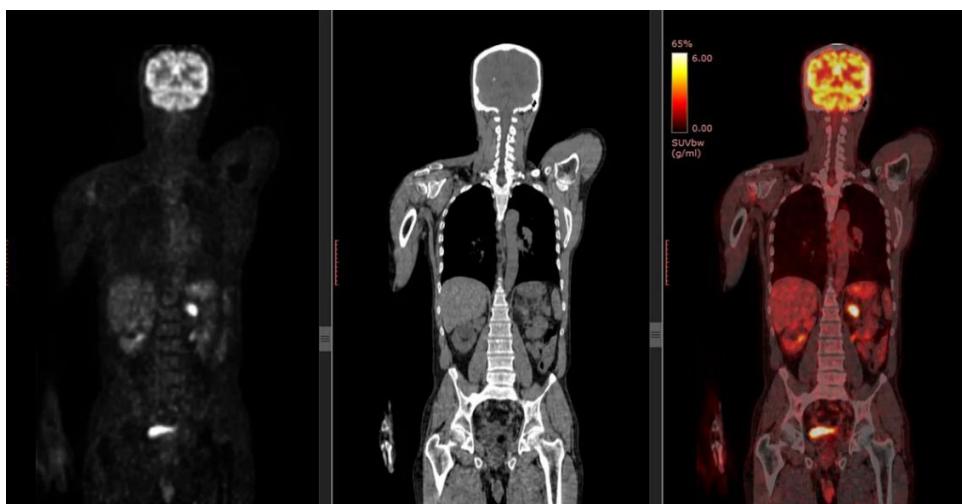


Figura 7. Imagini comparative între PET, CT și PET-CT

Pentru o examinare PET-CT de înaltă calitate, expunerea pacientului la radiații este mai mare comparativ cu o examinare PET standard, fiind estimată la aproximativ 25 mSv, față de 7 mSv pentru PET-ul standard. Doza de radiații poate fi redusă dacă se utilizează o tehnică de doză scăzută pentru CT, scăzând la sub 5 mSv. Totuși, chiar și cu tuburi de curent mai mic, expunerea la radiații din partea CT rămâne semnificativ mai mare decât doza de la sursa ^{68}Ge . Comparativ, expunerea anuală la radiații în România este de aproximativ 2,7 mSv, iar un zbor transatlantic generează aproximativ 0,12 mSv.

CONCLUZII

Tomografia prin emisie de pozitroni (PET) reprezintă o tehnică avansată de imagistică medicală, utilizată pentru a evalua funcțiile metabolice ale țesuturilor și organelor. Aceasta oferă informații esențiale pentru diagnosticarea precoce a bolilor, în special a afecțiunilor oncologice, neurologice și cardiovasculare. Metoda hibrid PET-CT combină imagistica metabolică PET cu precizia anatomică a tomografiei computerizate (CT), oferind astfel o imagine completă și detaliată pentru diagnostic și planificarea tratamentelor. Datorită preciziei și capacității sale de a detecta modificări la nivel celular, PET contribuie semnificativ la planificarea tratamentelor personalizate și la monitorizarea evoluției pacienților.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Rotaru N., Malîga O., Codreanu I. (2020), *Radiologie și radioprotecție*, Centrul Editorial-Poligrafic Medicina
- [2] Zhang J., Maniawski P., Knopp M.V. (2018). *Performance evaluation of the next generation solid-state digital photon counting PET-CT system*, jurnalul EJNMMI Research
- [3] Qin L., Huanying Li, Shen L., Ding D., Ren G. (2005). *Growth and characteristics of LYSO ($\text{Lu}_{2(1-x-y)}\text{Y}_{2x}\text{SiO}_5 : \text{Ce}_y$) scintillation crystals*, Crystal Growth
- [4] Workma R.B., Coleman R.E., (2006), *PET-CT Essentials for Clinical Practice*, editori R.B.Workma and R.E.Coleman

IMPORTANȚA JOCULUI DIDACTICO-MATEMATIC, ÎN DEZVOLTAREA CAPACITĂȚILOR INTELECTUALE LA ȘCOLARUL MIC

Mirela Ramona BALA ¹, Emilia BALA ²

^{1,2} Liceul tehnologic „Felix” Sânmartin, jud. Bihor, profesor pentru învățământul primar

¹ ramonabala18@yahoo.com, ² ema_bala@yahoo.com

Rezumat: *Esența jocului didactic matematic ca modalitate de educare intelectuală a elevilor, constă în faptul că la nivelul acestuia se realizează o îmbinare optimă între obiectivele urmărite, conținutul lecției și particularitățile psihice ale vârstei școlare mici, prin transpunerea sarcinilor de învățare sub forma jocului. În acest fel, stimularea dezvoltării intelectuale a elevilor se realizează din interior, prin organizarea lecțiilor în lumina noțiunilor de teoria mulțimilor și logică.*

Cuvinte cheie: *joc didactic, joc didactic matematic*

Dezvoltarea intelectuală generală a elevilor este favorizată de aplicarea noilor programe și implicit a manualelor, care duc la sporirea apreciabilă a profunzimii și accesibilității cunoștințelor de matematică din primii ani de școală. Prin aplicarea învățământului modern la clasele primare, se optimizează procesul de învățare și educare, se scurtează timpul de însușire a cunoștințelor, micșorând sau chiar eliminând lacunele.

În procesul instructiv - educativ desfășurat cu elevii, se folosesc metode și procedee noi care, experimentate la clasă, au ridicat prin aplicarea lor gradul de înțelegere și de însușire a cunoștințelor, au cultivat spiritul de creativitate la elevi, au pus accent pe munca individualizată.

Diferite studii și observații efectuate asupra jocului au evidențiat faptul că acesta îndeplinește multiple funcții. J. Piaget stabilește următoarele funcții ale jocului:

- **funcția de adoptare** realizată pe cele două coordonate: asimilarea realului la „eu” și acomodarea, transformarea „eu-lui” în funcție de modelele exterioare;
- **funcția catartică**, de descărcare energetică și rezolvare a conflictelor;
- **funcția de socializare**, constând în acomodarea copilului la ceilalți, asimilarea relațiilor cu cei din jur la propriul „eu”;
- **funcția de extindere a „eu-lui”**, de satisfacere a multiplelor trebuințe ale copilului, de la trebuințele cognitive de explorare a mediului la cele de valorificare a potențialului de care dispune, de la trebuințele perceptive și motorii la cele de autoexprimare în plan comportamental.

Matematica nu se învață pentru a ști, ci pentru a se folosi, pentru aplicarea ei în practică. Se poate spune că este știința cea mai operativă care are cele mai multe și mai complexe legături cu viața. De aceea, nu simplă instrucție matematică trebuie să dobândească tineretul, ci educație matematică, formație matematică. Acesta constituie unul dintre cele mai importante concepte ale culturii generale a omului societății noastre.

Învățământul matematic este raportat la cerințele epocii contemporane și constituie o preocupare pe plan mondial în vederea introducerii unor concepte de maximă generalitate, fapt ce conduce la cultivarea unei personalități ce gândește și înțelege matematic. Se pune accent pe gândirea teoretică, abstractă chiar la vârsta timpurie, deci este necesar ca în cadrul orelor de matematică elevii să fie solicitați tot mai mult, punându-i în situații noi, neprevăzute, care să-i mobilizeze, să-i dezvolte, să le pună în valoare originalitatea.

Sistemul matematic actual în școala primară își propune să asigure pentru toți elevii formarea competențelor de bază vizând: numerația, calculul aritmetic, noțiuni intuitive de geometrie, măsurare și măsuri.

Funcția principală a ciclului achizițiilor fundamentale și a ciclului dezvoltării este aceea instrumentală: de a forma elevilor capacități ale muncii intelectuale, de a-i învăța să învețe.

La vârsta școlară mică, elevii învață unele tehnici elementare ale activității intelectuale. Interesul pentru studiu se găsește într-o fază incipientă. Pentru a-i determina pe micii școlari să se

angajeze la o activitate atât de complexă și de dificilă cum este activitatea de învățare, în special a matematicii, trebuie stimulate o serie de mobiluri interne și externe care să declanșeze dorința, atracția și interesul pentru învățare, însoțite de satisfacția efortului tensional, de bucuria succesului.

Pe măsură ce li se pun în față dificultăți noi, fiind orientați și ajutați să le depășească, ei trăiesc bucuria succesului, dobândesc încredere în puterile lor, începe să-i intereseze activitatea matematică. La aceasta contribuie și conținutul interesant al matematicii, prezentarea lui la nivelul posibilităților lor de înțelegere, formele atractive de desfășurare a activităților.

Jocurile didactice sunt metode active care solicită integral personalitatea copilului. Sub raport structural, psihologic, orice tip de joc constituie o îmbinare a componentelor intelectuale cu cele afectiv- motivaționale. Jocul didactic are un conținut și o structură bine organizate, subordonate particularităților de vârstă, se desfășoară după anumite reguli și la momentul ales de adult sub directă lui supraveghere. Rol important capătă latura instructivă, elementele de distracție nefiind decât medietori ai stimulării capacităților creatoare.

Jocurile didactice sunt realizate pentru a deservi procesul instructiv-educativ, au conținut bine diferențiat, pe obiecte de studiu, au ca punct de plecare noțiunile dobândite de copii, iar prin sarcina dată, aceștia sunt în situația să elaboreze diverse soluții de rezolvare, diferite de cele cunoscute, potrivit capacităților lor intelectuale, accentul căzând astfel nu pe rezultatul final, cât pe modul de obținere al lui, pe posibilitățile de stimulare a capacităților intelectuale și afectivmotivaționale, în desfășurarea acestuia.

Studierea activității de joc pe diferite vârste a permis generalizarea unor observații care au condus la conturarea unor metode didactice distincte-jocul didactic și jocul logic, cu puternice valențe, contribuind la dezvoltarea inteligenței, a mobilității și a flexibilității gândirii, la concentrarea atenției, la crearea spiritului de inițiativă și independență în muncă, spiritul de echipă, de observație. Jocurile didactice și logice matematice conduc la realizarea obiectivului de bază, și anume : formarea noțiunii de număr și numerație la copilul preșcolar. În organizarea activităților cu conținut matematic trebuie să se țină seama de principiile impuse de psihologia genetică sau psihologia dezvoltării. Operațiile curente de comparare, clasificarea obiectelor, operațiile de identificare a unor asemănări și deosebiri, oferă posibilitatea de a ajunge la conceptul de număr, conform teoriei mulțimilor. Separarea obiectelor unei mulțimi, după anumite criterii permite desprinderea conceptului de număr ca rezultat al unei măsurători

Jocul didactic nu înseamnă "o joacă de copii", el este o activitate serioasă, care sprijină într-un mod fericit, fixarea unor deprinderi matematice durabile precum și împlinirea personalității copiilor. Jocul didactic dă un randament sporit față de celelalte modalități de lucru folosite în activitatea de învățare, solicitând o angajare deplină a capacităților intelectuale ale copiilor.

Procedeele intelectuale declanșate de joc în special cele ale gândirii au darul de a-i conduce pe copii în "a afla", "a descoperii" unele adevăruri noi pentru ei cu o oarecare ușurință, pe fondul angajării doar în apartenență, a unui efort mai mic și mai ales în condițiile unor satisfacții evidente. Jocul didactic poate fi utilizat ca o tehnică de explorare a activităților, de explorare a unor noțiuni pe cale mult mai accesibile. "Strategia jocului este în esență o strategie euristică". În joc copilul se găsește "în situația de actor", de protagonist și nu de spectator, ceea ce corespunde foarte bine dinamismului gândirii, imaginației și vieții afective unei trebuințe interioare de acțiune.

Jocul didactic matematic are un rol deosebit de important în dezvoltarea gândirii matematice și antrenarea capacităților creatoare ale copiilor. Referindu-ne la creativitatea gândirii, așa cum se manifestă ea, se poate preciza că în procesul cunoașterii științifice esența gândirii creatoare se manifestă prin descoperirea unor adevăruri, invenții, într-un cuvânt, achiziții care reprezintă un pas înainte în practica socială. Jean Piaget și L. S. Vigotski relevă însemnătatea interiorizării acțiunilor și a transformării lor în procese psihice. Ed. Claparede consideră că jocul, rezultând din imitație este un substitut de activitate eficientă și îndeplinește un rol compensator în sensul satisfacerii trebuințelor, intereselor copilului. La baza jocului sunt reacțiile circulare, ce se formează treptat, în

joc, îmbinând realul cu deviații imaginare. De fapt, scopul jocului constă în acțiunea de joc, el "pregătește viitorul, potolind nevoile prezente".

Diferitele clasificări ale jocului exprimă dezvoltarea lor stadială:

- jocuri în care se exersează funcțiile psihofiziologice;
- jocuri tehnice și productive;
- jocuri în care se reproduc unele relații sociale;
- jocuri militare;
- jocuri ce realizează dramatizarea;

Adaptarea copiilor la viața și activitatea școlară nu este ușoară. Odată cu intrarea în școală (la 6 – 7 ani), copilul nu renunță cu ușurință la comportamentul ludic ce i-a intrat în obișnuință în anii preșcolarității. E drept, acum el este apt să practice conștient și cu suficientă motivație activități de altă natură decât jocul, cum sunt învățătura, munca și creația, prima dintre ele fiindu-i cu totul specifică. Așa cum preșcolarul se află la vârsta jocului, școlarul de clasa I se află la primul contact autentic cu învățarea organizată și sistematică. El are imaginea acestei realități, în anumite limite se complace în ea, în sensul că e prea mare tendința de a învăța să citești, să scrii, să socotești, să te avâți în cunoaștere pe calea cititului și pe calea explorării organizate a realității cotidiene, ca să poți renunța cu ușurință la asemenea ocupații și să rămâi la simpla practicare a jocului. Dar, la această vârstă, e încă prea puternică motivația jocului, mai ales la școlarul de clasa I. Ar trebui ca activitatea de învățare organizată – cea realizată în principal sub forma lecțiilor – să fie cu mult mai tentantă și atractivă decât jocul, pentru ca elevul să se îndepărteze de acesta. În realitate, cu excepția primelor zile și săptămâni de școală, copilul de 6 – 7 ani, fără să mai vorbim de acela care se află la sfârșitul miciei școlarității, simte mare discrepanță între activitatea de inițiere în învățare, specifică grădiniței de copii și cea realizată în școală. Ceea ce simte el în această privință este o realitate total schimbată. Școala este altfel concepută decât grădinița de copii în sensul că ține prea puțin seama de mobilurile interne care determină și corelează diferitele conduite ale copilului. Acesta este și motivul pentru care, odată cu pășirea pragului școlii, micul școlar pune din ce în ce mai puține întrebări, privește cu rezervă – uneori cu indiferență, ceea ce i se cere să facă în clasă, în afara ei și în afara școlii, îndeplinește formal sarcinile școlare și se refugiază, pe ascuns sau fățiș, în lumea care îi convine, lumea jocului.

Ce se poate face în această privință?

Analizându-se nereușita la învățătură, mai ales în clasa I, a copiilor normal dezvoltați, s-a constatat că aceasta se datorează, între altele, necultivării atente a intereselor elevilor, în vederea achiziționării noilor cunoștințe. Cu alte cuvinte, progresul în procesul de învățământ este condiționat într-o măsură covârșitoare de o motivație superioară din partea elevului, exprimată prin interesul său nemijlocit față de problemele ce i se oferă, prin plăcerea de a cunoaște și explora necunoscutul, prin satisfacțiile ce le are în urma eforturilor sale.

Prin folosirea jocurilor didactice în predarea matematicii la clasele mici se realizează și importante sarcini formative ale procesului de învățământ. Astfel, jocurile didactice matematice :

- antrenează operațiile gândirii : analiza, sinteza, comparația, clasificarea, ordonarea, abstractizarea, generalizarea, concretizarea ;
- dezvoltă spiritul imaginativ-creator și de observație ;
- dezvoltă spiritul de inițiativă și independență în munca, precum și spiritul de echipă ;
- dezvoltă atenția, disciplina și spiritul de ordine în desfășurarea unei activități ;
- formează deprinderi de lucru corect și rapid ;
- asigură însușirea mai rapidă, mai temeinică, mai accesibilă și mai plăcută a unor cunoștințe relativ aride pentru această vârstă (numerația ; operațiile aritmetice etc.).

La copilul prescolar și școlarul mic, angajarea în joc este dictată de o necesitate de viață. Ei manifestă viu trebuința de a acționa izomorf adultului. Modelarea în joc a activității observate în

ambianță este o lege obiectivă. Pentru copil, jocul este un lucru firesc, este, după cum observă Blaga, "o înțelepciune" a vieții lui.

Necesitatea continuității dintre grădiniță și școală impusă de cerințe psihopedagogice și sociologice a devenit un adevăr pe care nu-l contestă nimeni. În condițiile în care grădinița este parte integrantă a învățământului și își propune ca obiectiv prioritar pregătirea copilului pentru școală, aceasta impune și folosirea unor metode și procedee specifice vârstei.

În ierarhia metodelor active folosite atât în învățământul preșcolar cât și în cel primar, jocul didactic își găsește locul cu maximă eficiență, el fiind o punte de legătură între joc- ca tip de activitate dominantă în grădiniță și activitatea specifică școlii- învățatură.

Jocul didactic este o activitate de învățare al cărei efort, datorită atractivității, elevii nu îl simt ci dimpotrivă îl doresc. El poate fi folosit atât ca metoda de predare-învățare, dar mai ales ca mijloc util de consolidare și aplicare a cunoștințelor însușite.

Având în vedere coborârea vârstei de școlarizare, jocul didactic trebuie folosit oră de oră, mai ales la clasele Pregătitoare, I și a II-a, el acționând favorabil și asupra elevilor care întâmpină greutăți în însușirea cunoștințelor.

Cu o eficiență maximă se pot utiliza jocurile didactice la clasa Pregătitoare și I, la noțiunea de mulțime, pentru recunoașterea semnului de relație sau a semnului operațiilor matematice pentru consolidarea cunoștințelor despre ordonarea numerelor naturale, pentru aflarea factorului sau a termenului necunoscut, etc. Jocul didactic matematic are o importanță deosebită în dezvoltarea vorbirii elevilor, deoarece forma de joc antrenează intens elevul în stimularea și exersarea vorbirii. Prin intermediul lui se fixează, se precizează și se activează vocabularul elevilor, se contribuie la îmbunătățirea pronunției, la formarea unor noțiuni matematice și implicit a unui limbaj matematic.

Jocul didactic matematic solicită intelectul elevilor, dă învățătorului posibilitatea să cunoască bine potențele și particularitățile individuale ale elevilor săi și astfel, să poată desfășura o muncă diferențiată.

Organizat și desfășurat metodic, jocul didactic matematic are o valoare instructiv-formativă deosebită.

Matematica fiind știința conceptelor celor mai abstracte, de o extremă generalitate, iar gândirea copilului fiind dominată de concret, copiii vor fi atrași prin activități care le fac plăcere și anume cele de joc.

Consider că jocul didactic matematic este mijlocul potrivit ales în vederea dezvoltării personalității multilaterale a copiilor și a unei funcționări optime din punct de vedere psiho-social al acestora.

Rezultatele bune obținute prin practicarea jocurilor didactice susțin efortul unor noi căutări și experimentări, în ideea sporirii considerabile a eficienței utilizării acestora în învățarea matematicii. În continuare, prezentăm câteva jocuri didactico-matematice folosite cu succes în aprofundarea matematicii la școlarul mic.

1. Joc, Ghicește din patru întrebări

Scopul jocului:

- însușirea corectă a terminologiei matematice;
- stabilirea raportului de relație dintre acestea.

Materiale: culegerea Matematica ... prin joc.

Regula jocului: învățătorul scrie pe tablă un număr, de exemplu 36. Copiii au dreptul să pună maximum patru întrebări (de genul: „Folosim adunarea?"; „Facem produsul?"; „Calculăm câtul?"; „Aflăm restul?"). După obținerea răspunsului afirmativ, elevii vor face cât mai multe calcule pentru a afla numerele ale căror sume, diferențe, produse ori câturi să fie 36. De exemplu: $0 + 36$; $66 - 30$; $60 + 6$; 6×6 etc.

Recompensă: elevului care într-un interval de timp va rezolva mai multe exerciții corecte i se va acorda calificativul F.B.

2. Joc: „Scrie la comandă!”

Scopul jocului:

- Dezvoltarea atenției și rapidității în scrierea numerelor naturale;
- Stabilirea relațiilor dintre număr și cifră;
- Dezvoltarea simțului ritmului.

Materiale: caiet de matematică, o baghetă sau un creion.

Regula jocului: învățătorul organizează clasa, îi atenționează pe elevi să facă liniște și să fie foarte atenți. Cu o baghetă sau cu un creion, învățătorul va bate în catedră de un număr de ori și va cere elevilor să scrie cifra corespunzătoare numărului de bătăi.

Recompensă: copilul care a scris corect cifrele corespunzătoare fiecărui grup de bătăi va primi un balon.

3. Joc : „Pisica”

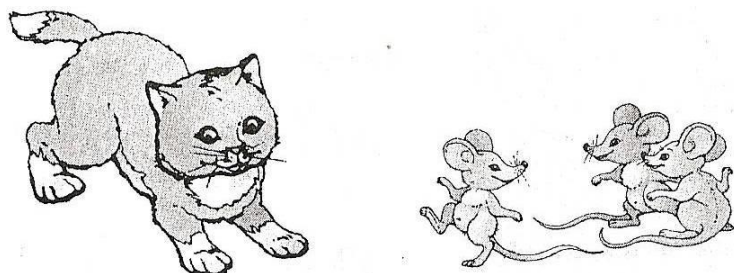
Scopul jocului:

- formarea deprinderilor de calcul rapid;
- consolidarea adunării și scăderii.

Materiale: o cutie, fișe pe care sunt scrise exerciții.

Regula jocului: un copil este „pisica”. El caută în „cutia cu șoricei” și ... prinde unul (o fișă).

Citește în fața clasei exercițiile, pe rând, iar copiii răspund cu rapiditate. Jocul continuă până când „pisica” a prins toți „șoriceii” (3-4).



Recompensă: copiii care greșesc la calcul sunt „pedepșiți” și puși să imite pisica sau șoricelul (spre hazul clasei de elevi).

4. Joc: „Datele problemei s-au

încurcat”

Scopul: operarea cu terminologia matematică specifică problemelor, dezvoltarea gândirii logice și a creativității;

Sarcina didactică: să ordoneze fragmentele unei probleme în ordinea necesară (date, cerință, rezolvare, răspuns), să rezolve problema.

Material didactic: plicuri cu jetoane, fișe, lipici.

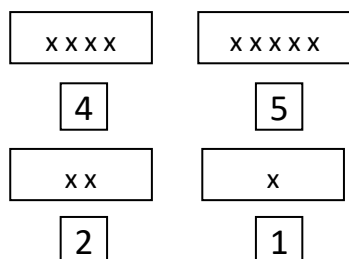
Desfășurarea jocului: Colectivul de elevi este împărțit pe echipe. Fiecare echipă primește câte un plic cu jetoane pe care sunt scrise probleme fragmentate. Elevii vor așeza în ordine fragmentele și vor rezolva problema. Echipa care va rezolva cel mai repede sarcina este declarată câștigătoare și va primi recompensă mere și pere.

5. Joc : „Domino”

Scopul jocului:

- formarea deprinderilor de a raporta cantitatea la număr;
- dezvoltarea spiritului competitiv.

Materiale: jetoane de tip domino.



Regula jocului: elevii vor primi jetoane de tip domino, unele cu elemente, altele cu cifre. Dintr-o singură încercare, copiii vor face corespondența dintre cifră și mulțimea corespunzătoare.

Recompensă: copiii care au rezolvat corect exercițiul vor primi un fanion pe care scrie „campion”.

6. Joc : „ Ciresele”

Scopul jocului:

- formarea deprinderilor de adunare a numerelor naturale;
- dezvoltarea gândirii și a rapidității în calcul;
- dezvoltarea spiritului competitiv.

Materiale: culegerea *Matematica ... prin joc*.

Regula jocului: învățătorul recită versurile de mai jos și le cere elevilor să facă operațiile corespunzătoare.

*Cireșele s-au copt, perechi-perechi,
Am două și-încă două la urechi,
Dar una dintre ele, cea mai mare,
I-o dau acuma dragei surioare ...
Câte cireșe mi-au rămas? Știi oare?*

Recompensă: primii trei elevi care răspund corect vor primi un jeton cu cireșe.

7.Joc:„Pușculița fermecată”

Scopul: recunoașterea semnelor de relație ($<$, $=$, $>$), folosirea lor în compararea numerelor.

Sarcina didactică: vor scrie semnul de relație în exercițiile scrise pe tablă.

Material utilizat: pușculiță, semne de relație, cretă colorată și cretă albă.

Elemente de joc: competiția, recompensa.

Tipul jocului: de consolidare acunoștințelor.

Desfășurarea jocului: pe tablă sunt scrise coloane cu perechi de numere.

65-5	30+50	20+33	85-25
3+72	55-34	58-55	23+32
30+15	80-65	82+2	78+0

8. Joc : „Semnul s-a pitit!”

Scopul jocului:

- folosirea corectă a semnelor de relație ($<$; $>$; $=$);
- perfecționarea tehnicii de calcul.

Materiale: fișe de muncă independentă.

Regula jocului: elevii vor primi fișe de muncă independentă și vor pune în pătrățele semnul de relație care se impune.

2 ☐ 3	10 + 4 ☐ 14
15 ☐ 15	9 – 3 ☐ 16
27 ☐ 72	18 – 8 ☐ 10

La nivelul învățământului primar, unde se pun bazele deprinderilor de munca intelectuală, jocurile didactice oferă un cadru propice pentru învățarea activă, participativă stimulând în același timp inițiativa și creativitatea elevilor. Ele reprezintă o formă de învățare accesibilă, plăcută, atractivă ce corespunde particularităților psihice ale acestei vârste.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Chivu, M. Pătrășcoiu, C. (2000), *Metodica predării activităților matematice la grădiniță și a matematicii la clasele I-IV*, Editura Radical, Bucuresti
- [2] Șchiopu, U., (2009), *Probleme psihologice ale jocului și distracțiilor*, Editura Romania Press, București
- [3] Popovici, E. (1971), „*Culegere de jocuri didactice pentru clasele I – IV*”, Editura Didactică și Pedagogică, București
- [4] Neagu, M., Mocanu, M., (2007), „*Metoda predării matematicii în ciclul primar*, Editura Polirom, Iași

IMPORTANȚA STUDIERII MATEMATICII ÎN DEZVOLTAREA GÂNDIRII ELEVILOR

Radu Vasile BOLOȘ¹, Ioana Florina BOLOȘ²

¹ Colegiul Național „Samuil Vulcan” Beiuș, profesor de matematică, bv.radu@yahoo.com

² GPP Nr 2, Meziad, profesor învățământ preșcolar, fo.pantea@yahoo.com

Rezumat: *Matematica este știința cu cea mai mare aplicabilitate în toate domeniile vieții.*

Cuvinte cheie: *dezvoltare, îmbunătățire.*

Matematica este știința care studiază structurile abstracte, modelele și relațiile dintre acestea, utilizând concepte precum numere, forme, funcții și simboluri. Este un domeniu vast care include diverse ramuri și subramuri, fiecare având aplicații în diferite domenii ale științei și tehnologiei, dar și în viața de zi cu zi.

Iată câteva dintre principalele ramuri ale matematicii:

Aritmetica: Studiul numerelor și al operațiilor fundamentale (adunare, scădere, înmulțire, împărțire).

Algebra: Studiul simbolurilor și al regulilor pentru manipularea acestor simboluri; implică lucrul cu ecuații și funcții.

Geometria: Studiul formelor, dimensiunilor și proprietăților spațiale ale obiectelor.

Analiza matematică: Studiul limitelor, derivatelor, integralelor și seriilor infinite; include calculul diferențial și integral.

Statistica și probabilitatea: Studiul colectării, analizării, interpretării și prezentării datelor; probabilitatea se ocupă de măsurarea incertitudinii.

Matematica discretă: Studiul structurilor discrete (non-continue), cum ar fi grafurile, mulțimile și algoritmii.

Teoria numerelor: Studiul proprietăților și relațiilor numerelor întregi.

Matematica este fundamentală pentru științe naturale, inginerie, economie, și multe alte domenii. Ea oferă un limbaj universal pentru descrierea și înțelegerea lumii din jurul nostru.

Studierea matematicii are o importanță semnificativă din mai multe perspective, influențând diverse aspecte ale dezvoltării individuale și societale. Iată câteva dintre principalele motive pentru care matematica este esențială:

Dezvoltarea abilităților cognitive:

Gândirea logică și analitică: Matematica promovează gândirea structurată, logică și analitică, ajutând elevii să abordeze probleme complexe în mod sistematic.

Rezolvarea problemelor: Capacitatea de a rezolva probleme este îmbunătățită, deoarece matematica necesită găsirea de soluții eficiente și inovatoare pentru diverse provocări.

Fundament pentru științe și tehnologie:

STEM (Știință, Tehnologie, Inginerie și Matematică): Matematica este fundamentul pentru disciplinele STEM, care sunt esențiale pentru inovație și progres tehnologic.

Cercetare și dezvoltare: Avansurile în matematică contribuie la dezvoltarea unor noi tehnologii și descoperiri științifice.

Utilitate în viața de zi cu zi:

Gestionarea finanțelor: Matematica este crucială pentru gestionarea eficientă a finanțelor personale, inclusiv bugetare, economisire și investiții.

Luarea deciziilor: Competențele matematice ajută la luarea deciziilor informate, de la evaluarea ofertelor comerciale la planificarea și analizarea proiectelor.

Îmbunătățirea carierei și oportunităților de angajare:

Cerințe de piață: Multe profesii, în special în domeniile tehnice și științifice, necesită cunoștințe avansate de matematică.

Adaptabilitate profesională: Abilitățile matematice sporesc adaptabilitatea și capacitatea de a învăța noi competențe în contextul schimbărilor economice și tehnologice.

Dezvoltarea abilităților de gândire abstractă:

Conceptualizare și modelare: Matematica ajută la dezvoltarea capacității de a lucra cu concepte abstracte și de a modela fenomene complexe, ceea ce este esențial în științele exacte și sociale.

Impact asupra societății:

Decizii politice și economice: Matematica joacă un rol esențial în formularea și analiza politicilor publice, economice și sociale.

Înțelegerea și abordarea problemelor globale: Probleme precum schimbările climatice, sănătatea publică și dezvoltarea durabilă necesită abordări matematice pentru soluționare.

Îmbunătățirea creativității și inovației:

Gândire inovativă: Matematica stimulează creativitatea și inovarea prin explorarea unor soluții și metode noi de abordare a problemelor.

Explorarea și descoperirea: Studiarea matematicii permite explorarea unor concepte noi și descoperirea unor relații și modele neanticipate.

Formarea unei mentalități riguroase și disciplinate:

Rigoare academică: Matematica învață elevii importanța exactității și a disciplinei intelectuale.

Perseverență și determinare: Procesul de învățare a matematicii necesită perseverență, ceea ce formează o atitudine pozitivă față de efort și munca susținută.

Prin urmare, importanța studierii matematicii nu se limitează doar la domeniul academic, ci se extinde asupra multor aspecte ale vieții personale și profesionale, contribuind la dezvoltarea unei societăți informate și capabile să facă față provocărilor complexe ale lumii moderne.

Studiarea matematicii joacă un rol crucial în dezvoltarea gândirii elevilor, având multiple beneficii pe diferite planuri. Iată câteva dintre cele mai importante aspecte:

Dezvoltarea abilităților de rezolvare a problemelor:

Matematica învață elevii să abordeze problemele în mod sistematic, să identifice soluții și să le aplice.

Elevii învață să descompună probleme complexe în părți mai simple, să caute modele și să dezvolte strategii pentru rezolvare.

Îmbunătățirea gândirii critice și analitice:

Prin studiul matematicii, elevii își dezvoltă capacitatea de a analiza și a evalua informațiile în mod logic.

Gândirea matematică încurajează formularea și testarea ipotezelor, ceea ce este esențial în multe domenii ale cunoașterii.

Riguros și precizie:

Matematica necesită atenție la detalii și exactitate, ceea ce ajută la formarea unei atitudini riguroase și precise în abordarea oricărei sarcini.

Stimularea creativității:

Contrar percepției comune, matematica poate fi un teren fertil pentru creativitate. Găsirea unor soluții inovatoare și metode diferite de rezolvare a problemelor stimulează gândirea creativă.

Dezvoltarea abilităților de raționament abstract:

Elevii învață să gândească abstract, să lucreze cu concepte care nu sunt întotdeauna vizibile sau tangibile, ceea ce este esențial pentru înțelegerea științelor avansate și a tehnologiei.

Pregătire pentru cariere tehnice și științifice:

O bună cunoaștere a matematicii este esențială pentru succesul în cariere din știință, tehnologie, inginerie și matematică (STEM), domenii care sunt din ce în ce mai importante în economia globală.

Îmbunătățirea competențelor decizionale:

Prin învățarea de a evalua date și de a face predicții bazate pe aceste date, elevii dezvoltă abilități valoroase pentru luarea deciziilor informate în viața de zi cu zi.

Adaptabilitate și învățare pe tot parcursul vieții:

Gândirea matematică și abilitățile analitice dobândite prin studiul matematicii îi ajută pe elevi să se adapteze mai ușor la noile provocări și să învețe continuu.

Îmbunătățirea capacităților cognitive:

Studiile arată că studiul matematicii poate îmbunătăți memoria, atenția și alte funcții cognitive.

Prin urmare, studiul matematicii nu doar că dezvoltă competențe specifice în domeniu, ci și contribuie la formarea unei gândiri structurate și adaptabile, esențială pentru succesul în multe aspecte ale vieții personale și profesionale.

BIBLIOGRAFIE

<https://edict.ro/rolul-studierii-matematicii-in-dezvoltarea-personalitatii/> accesat în data de 18.08.2024

APLICAȚII ALE TEOREMEI HAMILTON-CAYLEY

Gabriela BURTIC

Studentă anul I, Matematică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea
e-mail: bgi.gba@gmail.com

Rezumat. În această lucrare sunt prezentate, ca aplicații ale teoremei Hamilton-Cayley, câteva metode de calcul ale puterilor unei matrice pătratică de ordin 2.

Cuvinte cheie: ecuația caracteristică a unei matrice, valori proprii, teorema Hamilton-Cayley

1. Teorema Hamilton-Cayley

Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\square)$, vom nota $Tr(A) = a + d$ urma, respectiv $detA = ad - bc$ determinantul matricei A .

Ecuția

$$det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - Tr(A)\lambda + det(A) = 0$$

se numește ecuația caracteristică a matricei A , iar rădăcinile acesteia se numesc valorile proprii ale matricei A .

Teorema 1. (Hamilton-Cayley) Orice matrice pătratică $A \in M_2(\square)$ verifică propria sa ecuație caracteristică, adică

$$A^2 - Tr(A) \cdot A + detA \cdot I_2 = O_2.$$

Demonstrație. Într-adevăr, dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\square)$, atunci

$$A^2 - Tr(A) \cdot A + detA \cdot I_2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & cd + d^2 \end{pmatrix} - (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = O_2.$$

Consecința 2. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

1. dacă $det(A) = 0$, atunci $A^n = (TrA)^{n-1} \cdot A$;
2. dacă $Tr(A) = 0$, atunci $A^n = \begin{cases} (-det A)^k \cdot I_2, & \text{dacă } n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \\ (-det A)^k \cdot A, & \text{dacă } n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Demonstrație. Din Teorema Hamilton-Cayley, $A^2 = Tr(A) \cdot A - detA \cdot I_2$.

1. Dacă $det(A) = 0$, atunci $A^2 = Tr(A) \cdot A$ și inductiv se demonstrează că, pentru orice $n \geq 2$,
 $A^n = (TrA)^{n-1} \cdot A$.

2. Dacă $Tr(A) = 0$, atunci $A^2 = -(\det A) \cdot I_2$. Prin urmare, avem

$$A^{2k} = (A^2)^k = ((-\det A) \cdot I_2)^k = (-\det A)^k \cdot I_2,$$

$$\text{respectiv } A^{2k+1} = A^{2k} \cdot A = (-\det A)^k \cdot A.$$

Consecința 3. Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$. Dacă există un număr natural $n \geq 2$, astfel încât $A^n = O_2$, atunci $A^2 = O_2$.

Demonstrație. Dacă $A^n = O_2$, pentru un număr natural $n \geq 2$, atunci $(\det A)^n = 0$, de unde $\det A = 0$. Așadar, $O_2 = A^n = (Tr A)^{n-1} \cdot A$, de unde $A = O_2$ sau $Tr A = 0$. Dacă $A = O_2$, atunci $A^2 = O_2$, respectiv dacă $Tr A = 0$, atunci din teorema Hamilton-Cayley obținem $A^2 = O_2$.

Teorema 4. Dacă ecuația caracteristică a matricei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\square)$ are rădăcinile reale λ_1 și λ_2 , atunci există două matrice $B, C \in M_2(\square)$, astfel încât:

$$A^n = \begin{cases} \lambda_1^n \cdot B + \lambda_2^n \cdot C, & \text{dacă } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \lambda_1^n \cdot B + n \cdot \lambda_1^{n-1} \cdot C, & \text{dacă } \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}. \quad (1)$$

Demonstrație: Din Teorema Hamilton-Cayley, $A^2 = Tr A \cdot A - \det A \cdot I_2$, de unde obținem că

$$A^{n+1} = Tr A \cdot A^n - \det A \cdot A^{n-1} \quad (2)$$

Considerând că $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ și ținând cont de relația (2), obținem că

$$\begin{cases} a_{n+1} = Tr(A) \cdot a_n - \det A \cdot a_{n-1} \\ b_{n+1} = Tr(A) \cdot b_n - \det A \cdot b_{n-1} \\ c_{n+1} = Tr(A) \cdot c_n - \det A \cdot c_{n-1} \\ d_{n+1} = Tr(A) \cdot d_n - \det A \cdot d_{n-1} \end{cases}, \text{ pentru } n \geq 1.$$

Prin urmare, toate șirurile verifică aceeași relație de recurență liniară de ordinul II, $x_{n+1} = Tr(A) \cdot x_n - \det A \cdot x_{n-1}$, cu ecuația caracteristică $\lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det A = 0$ și cu rădăcinile reale λ_1 și λ_2 .

Cazul 1. Dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$, atunci $x_n = c_1(x) \cdot \lambda_1^n + c_2(x) \cdot \lambda_2^n$, unde $c_1(x), c_2(x) \in \mathbb{C}$. Deci

$$\begin{cases} a_n = c_1(a) \cdot \lambda_1^n + c_2(a) \cdot \lambda_2^n \\ b_n = c_1(b) \cdot \lambda_1^n + c_2(b) \cdot \lambda_2^n \\ c_n = c_1(c) \cdot \lambda_1^n + c_2(c) \cdot \lambda_2^n \\ d_n = c_1(d) \cdot \lambda_1^n + c_2(d) \cdot \lambda_2^n \end{cases}$$

adică $A^n = \lambda_1^n \cdot B + \lambda_2^n \cdot C$, unde $B = \begin{pmatrix} c_1(a) & c_1(b) \\ c_1(c) & c_1(d) \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} c_2(a) & c_2(b) \\ c_2(c) & c_2(d) \end{pmatrix}$.

Cazul 2. Dacă $\lambda_1 = \lambda_2$, atunci $x_n = c_1(x) \cdot \lambda_1^n + c_2(x) \cdot n \cdot \lambda_2^n$, unde $c_1(x), c_2(x) \in \mathbb{C}$. Deci

$$\begin{cases} a_n = c_1(a) \cdot \lambda_1^n + c_2(a) \cdot n \cdot \lambda_2^n \\ b_n = c_1(b) \cdot \lambda_1^n + c_2(b) \cdot n \cdot \lambda_2^n \\ c_n = c_1(c) \cdot \lambda_1^n + c_2(c) \cdot n \cdot \lambda_2^n \\ d_n = c_1(d) \cdot \lambda_1^n + c_2(d) \cdot n \cdot \lambda_2^n \end{cases}$$

adică $A^n = \lambda_1^n \cdot B + n \cdot \lambda_2^n \cdot C$, unde $B = \begin{pmatrix} c_1(a) & c_1(b) \\ c_1(c) & c_1(d) \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} c_2(a) & c_2(b) \\ c_2(c) & c_2(d) \end{pmatrix}$.

Observație. Din Teorema 4 rezultă că pentru orice matrice $A \in M_2(\square)$ care are valorile proprii reale $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, matricea A^n se poate scrie sub forma (1). Matricele B și C se determină din relația (1), luând $n=0$ și $n=1$.

Teorema 5. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\square)$, atunci există două șiruri de numere complexe $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$, astfel încât

$$A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2$$

pentru orice număr natural $n \in \square^*$.

Demonstrație. Demonstrăm prin inducție după n .

Din $A = 1 \cdot A + 0 \cdot I_2$, avem $x_1 = 1, y_1 = 0$, iar din $A^2 = \text{Tr}A \cdot A - \det A \cdot I_2$, obținem că $x_2 = \text{Tr}(A)$ și $y_2 = -\det A$. Așadar, afirmația din enunț este adevărată pentru $n=1$ și $n=2$.

Presupunem acum că afirmația este adevărată pentru un număr natural $n \geq 1$. Așadar, există numerele $x_n, y_n \in \square$, astfel încât $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2$. Din

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A = (x_n \cdot A + y_n \cdot I_2) \cdot A = x_n \cdot A^2 + y_n \cdot A = x_n (\text{Tr}A \cdot A - \det A \cdot I_2) + y_n A = \\ &= (\text{Tr}A \cdot x_n + y_n) \cdot A - \det A \cdot x_n \cdot I_2 \end{aligned}$$

obținem că $\begin{cases} x_{n+1} = \text{Tr}A \cdot x_n + y_n \\ y_{n+1} = -\det A \cdot x_n \end{cases}$, adică afirmația este adevărată și pentru $n+1$.

Așadar, $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2$, pentru orice $n \geq 1$.

2. Aplicații

Dacă $A \in M_2(\square)$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci pentru determinarea matricei A^n există cele două metode generale prezentate în Teoremele 4 și 5.

De exemplu, matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ are ecuația caracteristică $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ și valorile proprii reale $\lambda_1 = 2$ și $\lambda_2 = 3$.

Pe baza Teoremei 4, există două matrice $B, C \in M_2(\square)$, astfel încât $A^n = 2^n \cdot B + 3^n \cdot C$.

Din $\begin{cases} B + C = I_2 \\ 2B + 3C = A \end{cases}$ obținem că $B = -A + 3I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $C = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, de unde

$$A^n = 2^n \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 3^n \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & -2^{n+1} + 2 \cdot 3^n \\ 2^n - 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}.$$

Pe baza Teoremei 5, există două șiruri $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$, astfel încât $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2$. Din $A^{n+1} = A^n \cdot A = (x_n \cdot A + y_n \cdot I_2) \cdot A = x_n A^2 + y_n A = x_n (5A - 6I_2) + y_n \cdot I_2 = (5x_n + y_n)A - 6x_n \cdot A$ obține

m că $\begin{cases} x_{n+1} = 5x_n + y_n \\ y_{n+1} = -6x_n \end{cases}$, de unde $\begin{cases} x_{n+2} = 5x_{n+1} + y_{n+1} = 5x_{n+1} - 6x_n \\ y_{n+2} = -6x_{n+1} = -30x_n - 6y_{n+1} = 5y_{n+1} - 6y_n \end{cases}$, adică

$\begin{cases} x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n \\ y_{n+2} = 5y_{n+1} - 6y_n \end{cases}$. Cum ecuația caracteristică $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ are soluțiile $\lambda_1 = 2$ și $\lambda_2 = 3$, există

constantele a_1, a_2, b_1, b_2 astfel încât $\begin{cases} x_n = a_1 \cdot 2^n + a_2 \cdot 3^n \\ y_n = b_1 \cdot 2^n + b_2 \cdot 3^n \end{cases}$. Din $\begin{cases} x_1 = 2a_1 + 3a_2 = 1 \\ x_2 = 4a_1 + 9a_2 = 5 \end{cases}$ obținem că

$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 1 \end{cases}$, iar din $\begin{cases} y_1 = 2b_1 + 3b_2 = 0 \\ y_2 = 4b_1 + 9b_2 = -6 \end{cases}$ obținem că $\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_2 = -2 \end{cases}$. Așadar, $\begin{cases} x_n = -2^n + 3^n \\ y_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \end{cases}$, de unde

$$A^n = (-2^n + 3^n) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & -2^{n+1} + 2 \cdot 3^n \\ 2^n - 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

În unele situații, pentru determinarea matricei A^n se poate utiliza binomul lui Newton. Pentru aceasta, matricea A se descompune în mod convenabil ca sumă de două matrice care comută la înmulțire. Vom prezenta în continuare două astfel de situații:

Cazul 1. Dacă $A = \lambda \cdot I_2 + B$ cu $\det B = 0$ și $\text{Tr } B = t \neq 0$, atunci $B^k = t^{k-1} \cdot B$, pentru $k \in \mathbb{N}^*$ și

$$\begin{aligned} A^n &= (\lambda \cdot I_2 + B)^n = \lambda^n \cdot I_2 + \sum_{k=1}^n C_n^k \lambda^{n-k} B^k = \lambda^n \cdot I_2 + \sum_{k=1}^n C_n^k \lambda^{n-k} t^{k-1} B = \\ &= \lambda^n \cdot I_2 + \left(\sum_{k=1}^n C_n^k \lambda^{n-k} t^{k-1} \right) \cdot B = \lambda^n \cdot I_2 + \frac{1}{t} \left((\lambda + t)^n - \lambda^n \right) \cdot B, \end{aligned}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Cazul 2. Dacă $A = B + C$ cu $B \cdot C = C \cdot B = O_2$, atunci

$$A^n = (B + C)^n = B^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \cdot B^{n-k} C^k + C^n = B^n + C^n,$$

pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

De exemplu, matricea $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ se poate scrie $A = 3 \cdot I_2 + B$, unde $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$. Cum

$\det B = 0$ și $\text{Tr } B = 7$, se obține că $A^n = 3^n \cdot I_2 + \frac{1}{7} (10^n - 3^n) \cdot B$.

Un alt exemplu, este matricea $A = \begin{pmatrix} 2x - y & -x + y \\ 2x - 2y & -x + 2y \end{pmatrix}$. Aceasta se poate scrie $A = x \cdot B + y \cdot C$,

unde $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Cum $B \cdot C = C \cdot B = O_2$, se obține

$$A^n = x^n \cdot B^n + y^n \cdot C^n = x^n \cdot B + y^n \cdot C.$$

O aplicație directă a puterilor unei matrice, este determinarea șirurilor date prin sisteme liniare recursive. Pentru aceasta, să considerăm șirurile de numere reale $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ definite prin sistemul de relații de recurență

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases} \quad (3)$$

unde $n \in \mathbb{N}$, iar a, b, c, d, x_0, y_0 sunt numere reale date.

Sistemul (3) se poate scrie în mod echivalent, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, unde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Inductiv, se

demonstrează că $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și astfel, problema se reduce la aflarea formei generale a lui A^n .

BIBLIOGRAFIE

- [1] Fechete I., Fechete D., (2000). *Algebră*, Ed. Univ. Oradea
- [2] Heuberger D., Pop V., (2014). *Matematica de excelență - Cls. a XI-a, Vol. 1 Algebră*, Ed. Paralela 45
- [3] Năstăsescu C., Niță, C., Vraciu C. (1986), *Bazele algebrei, Vol. I.*, Ed. Academiei, București
- [4] Pop V., Lupșor V. (2004). *Matematica pentru grupele de performanță - Clasa a XI-a*, Ed. Dacia

APLICAȚII COLABORATIVE

Melinda CORITEAC

Liceul Teoretic "Constantin Șerban" Aleșd, jud. Bihor, profesor de informatică, melindacoriteac@yahoo.com

Rezumat: *Lucrarea cu titlul Aplicații colaborative surprinde generalități despre aplicațiile colaborative. Pentru început se definesc aceste aplicații, se prezintă rolul lor și se scoate în evidență modul în care utilizarea acestora se extinde cu rapiditate în toate domeniile. În continuare sunt enumerate avantajele și dezavantajele aplicațiilor colaborative la modul general și avantajele utilizării acestor aplicații în sistemul educațional, fiind prezentate pe scurt numeroase aplicații colaborative. Accesul se pune pe cele mai utilizate aplicații oferite de Google Workspace for Education și pe modul în care acestea facilitează un act didactic de calitate. Lucrarea se încheie cu enumerarea unor reguli de etică într-un mediu colaborativ, de care trebuie să se țină cont în vederea unei munci productive și eficiente.*

Cuvinte cheie: *colaborativ, echipă, comunicare, partajare*

Într-o societate în continuă schimbare, care evoluează în ritm alert, generațiile de oameni schimbă din ce în ce mai multe informații. Deși conceptul de colaborare nu este nou, munca în echipă utilizând medii de lucru interconectate este mai recent apărută și se extinde rapid în majoritatea domeniilor.

O aplicație colaborativă este un instrument software care oferă posibilitatea utilizatorilor să lucreze simultan la diverse fișiere, utilizând rețeaua Internet. În prezent există o mulțime de aplicații colaborative, unele gratuite, altele nu.

Despre aceste aplicații se poate spune că: favorizează munca în echipă de la distanță și nu numai, facilitează comunicarea și modificarea unor fișiere în timp real, oferă posibilitatea de gestiune a datelor (dosare/ fișiere) în comun, pot fi accesate de pe dispozitive diverse precum tabletă, smartphone, laptop ș.a.

În sistemul educațional aplicațiile colaborative au fost din ce în ce mai utilizate începând cu perioada în care orele s-au desfășurat în sistem online, pe fondul pandemiei Covid, dar utilizarea lor continuă și în prezent.

Utilizarea aplicațiilor colaborative în sistemul educațional oferă următoarele avantaje:

- favorizează colaborarea și comunicarea în timp real (elev-elev, elev-profesor, profesor – profesor), de la distanță;
- facilitează dezvoltarea competențelor lingvistice, respectiv digitale;
- permit crearea de lecții și sarcini de învățare atractive, antrenante, fiind favorizată o educație modernă, de calitate, care pune elevul în centrul propriei sale formări;
- permit împărțirea de sarcini de lucru în mod egal, astfel încât fiecare membru al echipei să își poată aduce contribuția la produsul final;
- rezultatul final poate fi mai unul mai bun decât rezultatul obținut în cazul muncii individuale;
- au costurile de achiziție și utilizare minime sau chiar inexistente;
- oferă instrumente utile și ușor de utilizat atât de către profesori cât și de către elevi.

Dintre dezavantajele pe care le au aplicațiile colaborative se pot aminti următoarele:

- în lipsa unei organizări temeinice a activității, persoanele care lucrează colaborativ ar putea să aducă modificări nedorite fișierelor cu care se lucrează;
- sarcinile trasate persoanelor care lucrează colaborativ ar putea fi greșit înțelese, în cazul în care acestea lucrează de la distanță.

Facilitățile oferite de către aplicațiile colaborative sunt dintre cele mai diverse și numeroase. Există aplicații care permit utilizarea conceptelor de hartă mintală sau brainstorming (**Bubbl** - <https://bubbl.us/>, **Miro** - <https://miro.com/>), aplicații care oferă o gamă largă de instrumente care îmbunătățesc comunicarea, colaborarea sau productivitatea unei instituții (**Slack** - <https://slack.com>),

aplicații care permit crearea de diagrame detaliate și profesionale (**Nulab** - <https://nulab.com/>) ș.a.

Dintre platformele educaționale cele mai cunoscute și folosite se pot aminti: **Moodle** (<https://moodle.com/>), **Schoology** (<https://app.schoology.com>), **Google Classroom** (<http://classroom.google.com>). Acestea permit crearea de clase virtuale, prezentarea unor lecții, trasarea de sarcini de lucru complexe și evaluarea elevilor pe bază de teste. Conectarea elevilor, respectiv a profesorilor se face pe bază de conturi de utilizator.

Partajarea de documente și comunicarea online se pot face cu ajutorul aplicațiilor precum: **Twiddla**, **Zoom**, **Google Meet**, **Microsoft Teams** ș.a. Acestea permit partajarea de table albe, pe care se pot încărca diverse documente sau scrie. În plus, acestea permit comunicarea video/audio a utilizatorilor.

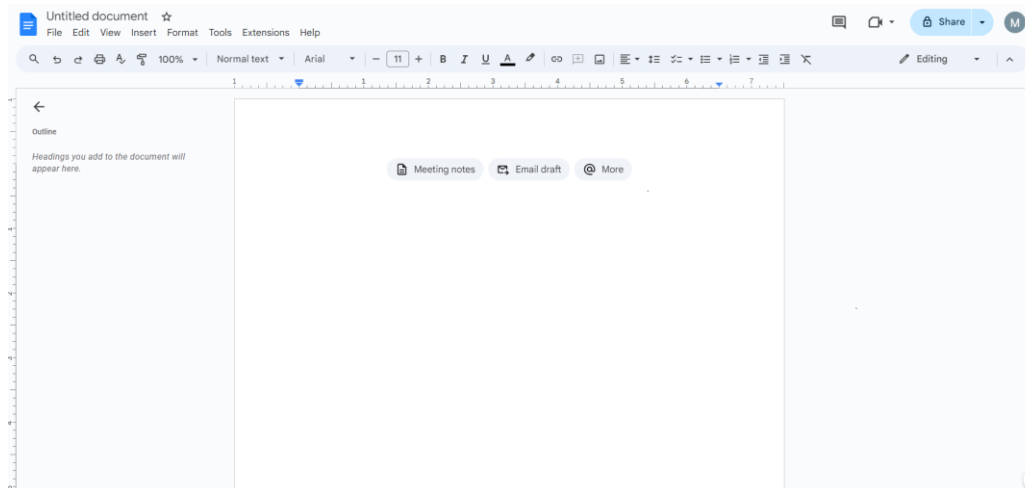
Alte platforme demne de amintit, foarte prietenoase și ușor de utilizat sunt **Canva** (<https://www.canva.com>), **Kahoot** (<https://kahoot.com>) și **Quizizz** (<https://quizizz.com/>). Prima permite editarea/crearea de imagini, afișe, postere, prezentări, este foarte prietenoasă și ușor de utilizat. Celelalte două permit crearea de sarcini de lucru interactive, teste ușor de administrat și centralizat.

Google Workspace for Education

Google oferă o serie de aplicații colaborative și servicii dintre cele mai diverse. Pentru a accesa aceste servicii, utilizatorii au nevoie de cont google. Cele mai utilizate aplicații în activitatea didactică, pe lângă multe altele la dispoziție, sunt:

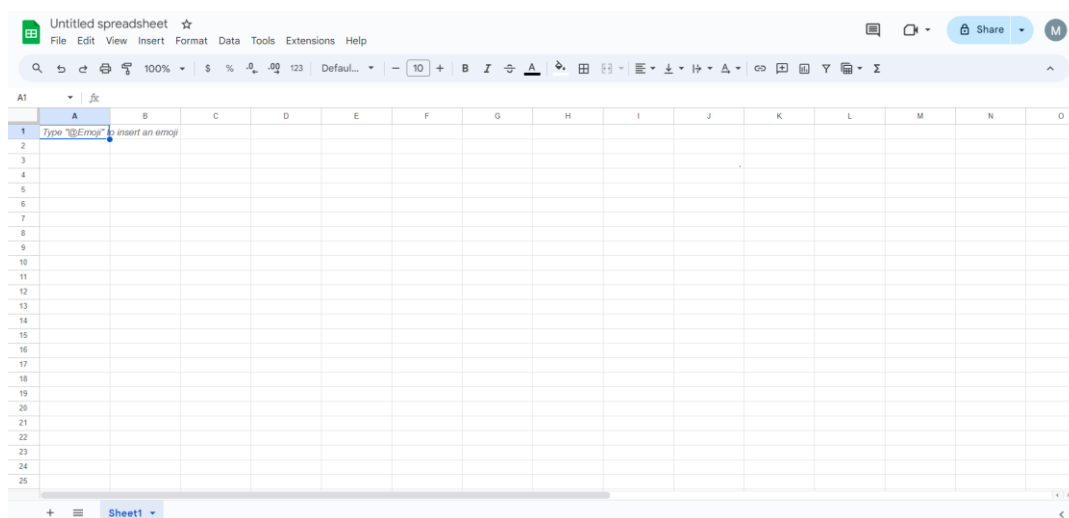
- **Gmail** – serviciu de poștă electronică. Are o interfață prietenoasă și este extrem de ușor de folosit.
- **Documente (Docs)** – procesor de documente – permite crearea de documente noi sau documente pornind de la anumite șabloane, respectiv modificarea/editarea de documente create cu alte editoare de documente precum *Microsoft Office Word*, *Open Office Writer* ș.a.

Interfața aplicației diferă de interfața aplicațiilor de tip desktop amintite anterior. Instrumentele de lucru sunt structurate sub formă de meniuri (File, Edit, View etc) și bare de instrumente.



Docs oferă majoritatea facilităților oferite de editoarele de documente uzuale, dar are și instrumente de lucru în plus. Unul dintre cele mai utile instrumente este *Voice typing* (din meniul *Tools/ Instrumente*), care permite scrierea textului rostit de utilizator.

- **Foi de calcul (Sheets)** – aplicație de calcul tabelar – are interfața asemănătoare cu cea a aplicației *Docs* și permite crearea și gestionarea de foi de calcul, respectiv editarea registrelor electronice create cu aplicații precum *Microsoft Office Excel* ș.a.



- **Prezentări (Slides)** – aplicație care permite crearea de prezentări electronice, respectiv editarea de prezentări electronice realizate cu alte aplicații precum cele din *Microsoft Office*, *Open Office* ș.a. Spre deosebire de *Microsoft Office PowerPoint*, efectele de animație și de tranziție sunt mai puțin diversificate, însă *Slides* oferă majoritatea facilităților oferite de aplicațiile complexe de realizare de prezentări electronice.
- **Meet** – permite efectuarea de videoconferințe.
- **Jamboard** – este tabla albă, care poate fi folosită ca o tablă obișnuită în lecțiile online. Pe aceasta se poate scrie, se pot lipi comentarii, insera texte, se pot adăuga imagini și cel mai important este că i se poate salva conținutul, în vederea utilizării ulterioare.
- **Classroom** – permite crearea de clase virtuale (cursuri) la care se pot asocia elevii, individual sau în colaborare cu alți utilizatori. În cadrul fiecărui curs se pot partaja materiale, teste ș.a.
- **Formulare (Forms)** – se utilizează pentru a crea formulare utilizate în sondaje de opinie, colectare de date ș.a. Acestea sunt foarte utile în centralizarea și analizarea datelor.
- **Drive** – oferă spațiu de stocare de date și servicii de partajare a acestora/gestionare în comun.

Toate fișierele create cu aplicații precum *Docs*, *Slides*, *Sheets*, *Forms* se stochează automat în *Drive*-ul asociat contului de utilizator, însă aplicațiile permit și descărcarea fișierelor în diferite formate (docx, odt, rtf, pdf – în cazul documentelor; xls, ods, csv, pdf – în cazul foilor de calcul; pptx, odp, html, jpg – în cazul prezentărilor electronice).

Fișierele din **Drive** pot fi partajate cu diverși utilizatori, pe baza de hiperlink sau adresa de email. Colaboratorilor li se pot da drepturi de editare, de vizualizare sau de comentarii. Când lucrează simultan mai mulți utilizatori asupra unui fișier, fiecare dintre aceștia poate să vadă, în timp real, la finalul modificărilor, o culoarea specifică fiecărui utilizator și modificările aduse de acesta, să vadă toate modificările aduse asupra unui fișier de la începutul creării acestuia (cu ajutorul opțiunii History). Aplicațiile oferă și servicii de chat, astfel încât utilizatorii să poată comunica.

Pentru ca munca în echipă, respectiv într-un mediu colaborativ să fie eficientă, se recomandă a se ține cont de următoarele reguli:

Alegeți un coordonator al echipei!

Distribuiți sarcini în mod egal!

Vedeți diferența dintre membrii echipei ca un avantaj!

Exprimați-vă liber în cadrul grupului, dar constructiv!

Respectați și apreciați opiniile celorlalți membri ai echipei!

Formulați mesaje scurte și clare!

Cooperați și veți descoperi idei noi!

BIBLIOGRAFIE

https://en.wikipedia.org/wiki/Collaborative_software

<https://www.youtube.com/watch?v=femiLuZKSN4>

<https://prezi.com/p/qqhwnxic7ncj/notiuni-de-etica-intr-un-mediu-colaborativ/>

https://tic.diferite.ro/wp-content/uploads/2020/02/TIC_VII_C10.pdf

GENERALIZĂRI ALE UNOR FORMULE TRIGONOMETRICE

Ana Maria COSMESCU

Școala Gimnazială nr 190, București, profesor de matematică, ana.cosmescu@yahoo.com

Rezumat: Scopul acestei lucrări este de a găsi o generalizare a formulei de calcul a sinusului sumei a două numere reale, precum și a formulei de transformare a produsului de două sinusuri în sumă.

Cuvinte cheie: sinus, formule, sume.

Formule pentru sinusul sumei a n numere reale

Notății :

Sumele $C_k = \sum \sin x_{i_1} \sin x_{i_2} \dots \sin x_{i_k} \cos x_{j_1} \cos x_{j_2} \dots \cos x_{j_{n-k}}$, $k = \overline{0, n}$ se fac după perechile de mulțimi ordonate $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ cu $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$
 $\{j_1, j_2, \dots, j_{n-k}\}$ cu $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n-k} \leq n$

Teorema 1

Există egalitatea

$$\sin(x_1 + x_2 + \dots + x_n) =$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k (\sum \sin x_{i_1} \sin x_{i_2} \dots \sin x_{i_{2k+1}} \cos x_{j_1} \cos x_{j_2} \dots \cos x_{j_{n-2k-1}})$$

, unde k ia valorile 2k respectiv 2k+1.

Demonstrație:

$$(\cos x_1 + i \sin x_1)(\cos x_2 + i \sin x_2) \cdot \dots \cdot (\cos x_n + i \sin x_n) = \cos(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + i \sin(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

Prin dezvoltarea membrului stâng și identificare, rezultă formula din enunțul teoremei 1.

Consecințe:

1) Pentru n=3 se obține

$$\cos(x_1 + x_2 + x_3) = \sin x_1 \cos x_2 \cos x_3 + \cos x_1 \sin x_2 \cos x_3 + \cos x_1 \cos x_2 \sin x_3 - \sin x_1 \sin x_2 \sin x_3$$

2) Pentru $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$, obținem formula cunoscută

$$\sin nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + C_n^5 \cos^{n-5} x \sin^5 x - \dots$$

1. Formule pentru transformarea produsului a n sinusuri în sume

Teorema 2

Există egalitățile:

a)

$$2^{2m-1} \sin x_1 \sin x_2 \dots \sin x_{2m} = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k} (\sum \cos(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k} - x_{j_1} - x_{j_2} - \dots - x_{j_{2m-k}})) + \sum \cos(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_m} - x_{j_1} - x_{j_2} - \dots - x_{j_m})$$

, dacă $n = 2m, m \in \mathbb{N}^*$; (1)

b)

$$2^{2m} \sin x_1 \sin x_2 \dots \sin x_{2m+1} = \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} \sum \sin(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k} - x_{j_1} - x_{j_2} - \dots - x_{j_{2m+1-k}})$$

, dacă $n = 2m + 1, m \in \mathbb{N}^*$. (2)

Demonstrație:

Fie numerele complexe $z_k = \cos x_k + i \sin x_k, k = \overline{1, n}$

$$2i \sin x_k = z_k - \overline{z_k}$$

Prin înmulțirea relațiilor, obținem:

$$i^n 2^n \sin x_1 \sin x_2 \dots \sin x_n = (z_1 - \overline{z_1})(z_2 - \overline{z_2}) \dots (z_n - \overline{z_n}) =$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \left(\sum z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k} \overline{z_{j_1} z_{j_2} \dots z_{j_{n-k}}} \right)$$

Dacă $n = 2m, m \in \mathbb{N}^*$, grupând convenabil se obține:

$$(-1)^m 2^m \sin x_1 \sin x_2 \dots \sin x_{2m} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \left(\sum \left((-1)^{2m-k} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k} \overline{z_{j_1} z_{j_2} \dots z_{j_{2m-k}}} + (-1)^k z_{j_1} z_{j_2} \dots z_{j_{2m-k}} \overline{z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k}} \right) \right) + (-1)^m z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_m} \overline{z_{j_1} z_{j_2} \dots z_{j_m}}. \quad (3)$$

Deoarece $2m-k$ și k au aceeași paritate și observând că

$$z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k} \overline{z_{j_1} z_{j_2} \dots z_{j_{n-k}}} - z_{j_1} z_{j_2} \dots z_{j_{n-k}} \overline{z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k}} = 2i \sin(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k} - x_{j_1} - x_{j_2} - \dots - x_{j_{n-k}}), \text{ relația(3) devine:}$$

$$(-1)^m 2^m \sin x_1 \sin x_2 \dots \sin x_{2m} =$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \left(\sum \cos(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k} - x_{j_1} - x_{j_2} - \dots - x_{j_{2m-k}}) \right) +$$

$$+ 2(-1)^m \sum \cos(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_m} - x_{j_1} - x_{j_2} - \dots - x_{j_m}).$$

Această relație înmulțită cu $(-1)^m$ și simplificată cu 2, dă exact formula (1).

Consecințe

1) Pentru $n=3$ avem

$$4 \sin x_1 \sin x_2 \sin x_3 = \sin(x_1 + x_2 + x_3) + \sin(x_1 - x_2 - x_3) + \sin(x_2 - x_1 - x_3) + \sin(x_3 - x_1 - x_2).$$

2) Pentru $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$, obținem

$$2^{2m} \sin^{2m} x = 2 \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k} C_{2m+1}^k \cos 2(m-k)x + C_{2m}^m;$$

$$2^{2m} \sin^{2m+1} x = 2 \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} C_{2m+1}^k \cos(2m-2k+1)x.$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] Turtoiu F. (1986), *Probleme de trigonometrie*, Editura Tehnică, București
 [2] Toloși M., Alecu M. (2010), *Gazeta Matematică* nr.7-8-9

STRATEGII DE PROMOVARE A COMPETENȚELOR MATEMATICE PENTRU ELEVII DE CLASA A V-A

Marinel Costel COSTEA

Școala Gimnazială nr. 1, Răbăgani, costelc11@yahoo.com

Rezumat: Dezvoltarea competențelor matematice este o prioritate în contextul educațional actual, iar studiul diferitelor metode de predare a devenit un subdomeniu de mare importanță în cercetarea în domeniul educației. Cele mai bune practici și modele eficiente în dezvoltarea abilităților matematice implică adesea dezvoltarea competențelor și conectarea conceptelor matematice la situații din viața reală, precum și acoperirea diferitelor aspecte ale relației dintre predare, psihologie și matematică..

Cuvinte cheie: competențe matematice, strategii de promovare

Dezvoltarea competențelor matematice la elevi reprezintă o prioritate în contextul educațional actual, în care matematica este predată din ce în ce mai des pentru a ajuta elevii să dobândească cunoștințe și gândire critică în numeroase discipline. Astfel, în societatea cunoașterii, cunoștințele matematice sunt necesare și dezvoltate transversal la toate nivelurile de învățământ. Subliniem importanța dezvoltării competențelor matematice la elevii de clasa a V-a în sistemul educațional românesc. În prima parte, analizăm situația competențelor matematice ale elevilor de clasa a V-a din România. De asemenea, încercăm să identificăm câteva strategii eficiente și recomandări care ar trebui să ducă la creșterea performanțelor la matematică ale elevilor, precum și implicațiile rezultatelor evaluării competențelor matematice la elevii de clasa a V-a din România pentru sistemul educațional.

Dezvoltarea abilităților matematice de la o vârstă fragedă este esențială pentru copii, deoarece deținerea de cunoștințe și informații matematice acționează ca un stimulent și un sprijin în ceea ce privește prezența lor la școală și finalizarea cursurilor, îmbunătățind memoria și atenția. Acest lucru va fi benefic pentru dezvoltarea lor și le va oferi o serie de avantaje cognitive, sprijinind formarea conceptelor, judecata și raționamentul practic, favorizându-le astfel permanent. Ei vor fi capabili să înțeleagă fenomenele și să prevadă consecințele. În viața de zi cu zi, cunoștințele de matematică aplicate și derivate din înmulțire, împărțire, procente, adunare și scădere îi vor stimula pe copii să dezvolte capacități mai bune de rezolvare a problemelor. Din ce în ce mai mult, în contextul dezvoltării societății informaționale, cunoștințele matematice vor fi fundamentale în dezvoltarea capacităților și analizarea problemelor, precum și în rezolvarea problemelor complexe. Acestea vor sta la baza studiilor bazate pe știință, tehnologie, viața economică, statistică, prelucrarea informațiilor etc. Acestea vor fi necesare în viața de zi cu zi, la locul de muncă, în domenii precum medicina, agricultura, construcțiile și aproape toate profesiile, precum și în dezvoltarea hobby-urilor și a cercetării în domenii precum astronomia. Un nivel de competență matematică va fi necesar în diverse activități: pentru orientarea în spațiu, optimizarea temporală, activități financiare și achiziționarea unei locuințe. Ea va fi utilă în citirea și interpretarea contractelor și a documentelor juridice din magazine. Competența matematică este foarte importantă pentru educația și dezvoltarea oricărui copil. Competiția matematică poate stimula dezvoltarea cognitivă la nivel personal.

Programa de matematică pentru clasa a V-a are următoarele componente:

- (1) Numere și sisteme numerice: reprezentări în sisteme poziționale până la 100.000; operații cu numere naturale; înțelegerea și rezolvarea problemelor cu numere naturale;
- (2) Frații zecimale: valoarea locului; reprezentări și operații cu fracții zecimale de sutimi; rezolvarea problemelor cu numere întregi și numere naturale, în care sunt implicate distanțe și timp;
- (3) Divizibilitatea și multiplii numerelor naturale: multipli și divizori comuni, cel mai mic multiplu comun și cel mai mare divizor comun; rezolvarea problemelor care implică elemente ale relațiilor dintre numere naturale;

(4) Numere raționale: valoarea locului; reprezentări și operații cu fracții și numere mixte; rezolvarea de probleme matematice cu numere naturale și întregi cu fracții zecimale, fracții ordinare și fracții negative;

(5) rezolvarea de probleme aritmetice: rezolvarea de probleme structurate cu numere naturale, întregi și numere raționale, în diferite reprezentări;

(6) măsuri: reprezentări, relații de unitate și operații asupra măsurilor. Aceste conținuturi sunt organizate în șase materii.

Primele patru (Numere și sisteme numerice, Frații zecimale, Divizibilitate și multipli, Numere raționale) sunt caracteristice clasei a V-a, deoarece elevii dezvoltă primele operații cu fracții zecimale, aplicând cunoștințele din aritmetica cu numere naturale. Ultimele două subiecte (Rezolvarea problemelor aritmetice, Măsurători) manifestă interdisciplinaritatea matematicii. Ele nu provin exclusiv din elemente structurale și de raționament, ci mai degrabă provin din necesitatea generatoare de activitate matematică. Setul de abilități este organizat în cinci componente principale, care sunt prezente în aproape toate disciplinele: raționament și argumentare, comunicare, modelare, reprezentare și conexiune cu alte cunoștințe matematice. Prin urmare, s-a observat predominanța dimensiunii metacognitive și epistemologice. Aceste abilități de ordin superior sunt denumite abilități autoreglate.

Strategiile eficiente de promovare a competențelor matematice la elevii de clasa a V-a ar trebui să constituie o preocupare a sistemelor educaționale. Numeroși cercetători din domeniul matematicii au dezvoltat metode, modele și abordări pedagogice pentru a spori dezvoltarea acestor abilități mentale. Studiul strategiilor eficiente este extrem de important într-o societate în care există o serie de oportunități de predare și poate servi drept stimulent pentru a crea oportunități egale de învățare într-o societate democratică.

Datorită diferitelor ritmuri de învățare, diferitelor stiluri de învățare și diferitelor tipuri de dificultăți sau facultăți ale elevilor, profesorii trebuie să utilizeze strategii care includ diferențierea prin adaptarea instruirii, a mediului, a conținutului și a evaluării la nevoile, preferințele și, în consecință, la apartenența lor. Principiul instruirii diferențiate se bazează pe ideea că diferențele dintre elevi sunt văzute ca o forță. Instruirea diferențiată ar trebui să ia în considerare talentele, experiențele și preferințele elevilor și să implice un accent puternic pe stabilirea sarcinilor de grup și a activităților individuale, deoarece copiii învață unii de la alții și se simt importanți.

O altă strategie eficientă pentru adaptarea și satisfacerea nevoilor copiilor este utilizarea tehnologiei moderne a informației. Prezența pe scară largă a calculatoarelor în clasă este doar una dintre configurațiile mediului virtual de învățare, iar resursele multimedia utilizate în predarea matematicii pot ajuta elevii să înțeleagă mai bine conceptele și, la un grad ridicat de abstractizare, pot concretiza aceste fenomene prin interpretarea problemelor într-un context real ușor de înțeles pentru elevi, în special pentru cei cu memorie vizuală. Relațiile dintre matematică și conceptele utile îi vor ajuta pe acești elevi să dezvolte gândirea matematică și scrierea în gândirea matematică. Pe lângă rolul catalizator excepțional al experimentării și simulării, acest tip de resurse poate oferi elevilor posibilitatea de a vorbi, de a asculta, de a asculta activ, de a se exprima într-un mod structurat și, nu în ultimul rând, de a-și dezvolta capacitatea de a lucra în echipă.

Instruire diferențiată

Instruirea diferențiată este considerată o strategie importantă în educația matematică. Prin utilizarea acestei strategii, profesorii modifică resursele, metoda de predare și modul în care sunt evaluate eforturile elevilor în funcție de nevoile și/sau preferințele individuale ale elevilor. Instruirea diferențiată constă în adaptarea materialului învățat în trei domenii: resursele, metoda de predare și forma de evaluare. De asemenea, susținem că instruirea diferențiată sprijină profesorii în nucleul sistemului educațional românesc care reclamă incluziunea școlară. Profesorul oferă sprijin elevilor cu dizabilități sau condiții fizice, intelectuale și psihice, care ar putea îngreuna procesul de învățare a matematicii, prin adaptarea la nevoile elevilor și la diferențele fiecărui copil, promovând un mediu incluziv. Această metodă de instruire poate crește, de asemenea, nivelul de încredere al

elevilor la ora de matematică, sprijinindu-i în descoperirea bucuriei de a învăța, deoarece cunoașterea necesită implicare și emoții.

Instruirea diferențiată merge dincolo de metodele tradiționale de predare și abordează variațiile în ceea ce privește pregătirea, interesul și stilurile de învățare ale elevilor, în timp ce profesorii mențin o abordare centrată pe elev, egală pentru toți. Această învățare poate varia în termeni de spațiu, timp sau instrucțiuni. Cel mai important nivel la care poate avea loc diferențierea este modul în care elevii pot stăpâni informațiile. Diferențierea nu se referă la oferirea unor resurse sau instrucțiuni diferite pentru diferiți elevi, ci la oferirea mai multor căi de înțelegere a rezolvării problemelor și a cunoștințelor, sau la descoperirea mai multor răspunsuri. Astfel, în clasa de matematică, diferiți elevi pot învăța diferite aspecte ale unei probleme la un nivel care este "potrivit pentru ei". În logica lecțiilor de matematică pentru clasa a V-a, aleasă pentru această cercetare, sunt menționate principalele direcții ale instruirii diferențiate în predarea conținuturilor matematice, reprezentând obiective generale, specifice, dar și comune, respectiv flexibilitatea în dezvoltare, conținut și interacțiune între elevi.

Utilizarea tehnologiei în predare

Atunci când se discută despre tehnologie, se consideră adesea că aceasta se referă la utilizarea calculatoarelor și a internetului. Cu siguranță, aceasta implică potențialul calculatoarelor, utilizarea de software educațional, jocuri educaționale și resurse matematice online ca instrumente eficiente în matematică. Acestea ajută la formarea capacității de rezolvare a problemelor, fac conexiuni între matematică și alte discipline și fac ca experiența matematică generală să fie mai atractivă. Acest lucru nu înseamnă că aceste instrumente înlocuiesc sistemele educaționale. Educația este încă, în mare parte, o activitate umană. Este vorba despre oameni care interacționează cu alții pentru a împărtăși, dezvolta și dobândi cunoștințe, abilități și înțelegere. Tehnologia poate fi utilizată pentru a crea medii de învățare mai interesante și mai personalizate, dar poate limita cât de productive pot fi de fapt experiențele de învățare.

Tehnologia joacă un rol crucial în oferirea de feedback instantaneu elevilor. Puterea acestui feedback constă în faptul că poate arăta erori atât în procesul de raționament, cât și în răspunsurile finale. Acest tip de feedback permite dezvoltarea raționamentului matematic. Dacă acest lucru ar fi văzut doar în testele cu variante multiple de răspuns pentru matematica competițională, experții recunosc că aceasta este doar baza rezolvării problemelor, dar apoi, dacă este tradus în instruire prin concentrarea pe dezvoltarea raționamentului matematic, poate fi văzut într-o lumină mai pozitivă. Tehnologia care poate urmări doar greșelile nu este foarte utilă, dar dacă conținutul platformei este creat cu designul în minte de a face conexiuni, aceasta poate deveni o experiență de învățare puternică.

Aplicații din lumea reală

Mulți cercetători și practicieni subliniază importanța de a le arăta elevilor utilitatea reală a învățării despre micro-lumi și activități sociale. Elevii sunt mai implicați în învățare atunci când apreciază semnificația unui anumit subiect, în special atunci când îl pot raporta la propriile lor preocupări, interese și activități. Ei au nevoie ca profesorii să le clarifice potențialele utilizări ale învățării, arătându-le că învățarea despre rolul unui obiect, proces sau acțiune, fie ea micro sau gigantică, poate avea aplicații pentru ei și pentru cei dragi lor. Din păcate, trecerea de la sarcini simple, de nivel școlar, la situații din viața reală este blocată de lipsa micro-lumilor reale promovate pentru educație sau de lipsa suporturilor pentru experiențele practice disponibile. Problemele practice pot proveni, de asemenea, din inoportunitatea includerii anumitor subiecte. În ciuda acestui fapt, conștientizarea existenței diverselor organizații și concursuri în care are loc manipularea mai multor micro-lumi ale vieții reale poate încuraja creativitatea profesorilor în utilizarea unora dintre ele ca tipuri sau puncte de plecare pentru a propune alte probleme elevilor.

O viziune integrată a unor situații reale și a unor micro-lumi reale poate ajuta la rezolvarea mai multor probleme și la învățarea și înțelegerea diferitelor teme și domenii din programele școlare existente. Asocierea materialelor de matematică cu competențele generale poate facilita rezolvarea

diferitelor probleme. Ca urmare a aplicării matematicii în blocuri de probleme textuale, s-au constatat două tipuri de utilitate: sunt dezvoltate noi strategii și sunt identificate noi abordări pentru înțelegerea cunoștințelor matematice respective. În acest sens, elevii înțeleg micro-lumea, utilizează conceptele aferente, găsesc idei utile pentru identificarea modelului matematic și aplică cunoștințele matematice implicate în studiu. Elevii sunt convinși că matematica studiată este utilă, ceea ce îi motivează să învețe.

Învățarea colaborativă

Învățarea colaborativă este o strategie frecvent utilizată în școli. Această strategie sugerează implicații pozitive în ceea ce privește dezvoltarea de concepte și relații matematice în cadrul unei comunități de elevi din aceeași clasă. Elevii învață mai profund decât cei din clasele tradiționale în care indivizi cunoscători transmit informații. Aceștia se implică în discuții și dezbateri, primesc o gamă largă de strategii și perspective, învață să își exprime și să își împărtășească raționamentul, pun la îndoială ipotezele și își dezvoltă abilitățile de rezolvare a problemelor. Elevii care au fost expuși la activități de colaborare demonstrează niveluri crescute de concepte interconectate legate de vârstă, atât în interiorul lor, cât și în raport cu abordările altor copii. Elevii dezvoltă strategii de comunicare și interpersonale adecvate vârstei care permit formarea gândirii matematice.

Mai multe posibilități ar putea fi luate în considerare de către profesori, care ar putea oferi o perspectivă asupra utilizării grupurilor mici în clasele de matematică de clasa a V-a: facilitarea proiectelor de grup într-o clasă de matematică este, în general, considerată una dintre cele mai bune modalități de a realiza o varietate de procese de învățare, inclusiv munca în echipă și practicile de colaborare și, în același timp, de a stimula competențele matematice. O aplicație comună în clasă este cea mai potrivită pentru programele de învățământ care pun accentul pe învățarea activă, în care elevii sunt centrul de responsabilitate pentru învățare. Tutoratul între colegi este o abordare didactică în care elevii îi ajută pe alții în procesul lor de învățare. În matematică, activitățile de tutorat între colegi pot fi utilizate pentru a se concentra pe orice subiect matematic. Acestea utilizează colegii ca o resursă pentru accelerarea învățării în matematică generală. Interacțiunile sociale dintre tutore și tutelat pot spori sau diminua capacitatea acestora de a-și concentra atenția și efortul asupra lecției programate. Cercetările privind eficiența încorporării tutoratului între colegi în clasă au arătat că elevii pot dezvolta un sentiment îmbunătățit de stimă de sine și performanțe academice mai bune. De asemenea, aceștia își dezvoltă abilitățile interpersonale, învață să lucreze în colaborare, dau dovadă de leadership și învață într-o atmosferă prietenoasă în care sunt promovate relațiile pozitive între colegi. O abordare colaborativă a învățării într-o clasă de matematică poate ajuta elevii să își îmbunătățească abilitățile de comunicare, sociale, de învățare proactivă și intrapersonale. De fapt, aceasta încurajează elevii să fie independenți și încrezători în învățare, îmbrățișând în același timp cooperarea în învățarea împreună, sporind responsabilitatea socială și devenind factori de decizie eficienți. Lucrările privind îmbunătățirea abilităților sociale și de comunicare sunt facilitatori recunoscutibili, subminând constrângerile, și sunt benefice pentru îmbunătățirea nivelului de cunoștințe și integrarea proceselor de învățare colaborativă.

Se pot face mai multe recomandări pentru un sistem educațional axat pe matematică, cu scopul de a îmbunătăți situația elevilor de clasa a V-a. Aceste recomandări se referă la diferite domenii de dezvoltare, vizând elevii, profesorii, școlile, părinții, comunitatea, autoritățile educaționale și factorii de decizie politică. Aceștia ar trebui să definească și să pună în aplicare programe școlare care să integreze programe și activități curriculare moderne, valide și eficiente, adaptate la particularitățile elevilor de clasa a V-a, bazate pe utilizarea unor strategii și metode pedagogice eficiente. Conținutul matematic implementat trebuie să promoveze semnificații autentice, centrate pe competențele și abilitățile elevilor, stimulând imaginația, creativitatea, flexibilitatea și entuziasmul pentru învățarea matematicii. Asigurarea dezvoltării profesionale a tuturor cadrelor didactice implicate în desfășurarea lecțiilor de matematică este vitală ca abordare strategică pentru a ajunge la elevii care temporar nu reușesc să obțină o educație optimă.

Acestea ar trebui să integreze în educația inițială a cadrelor didactice, în timpul formării preuniversitare, dar și în dezvoltarea profesională a cadrelor didactice, în cadrul serviciilor sau ca forme de învățare individuală, actualizarea fundamentală a cunoștințelor legate de conținutul matematic, precum și inserarea și promovarea aplicațiilor practice din diferite domenii de cunoaștere în experiența acestora. Este strict necesară crearea condițiilor pentru egalitatea de șanse și asigurarea accesului tuturor actorilor educaționali la resurse specifice, cum ar fi programe școlare eficiente, manuale școlare, resurse educaționale avansate și materiale școlare la fel de eficiente. Învățământul modern este o cunoaștere modernă. Revoluția informației și a comunicării se bazează în esență pe revoluția informației, care se bazează pe o explozie de cunoștințe. Procesul de predare-învățare, prin intermediul instrumentelor TIC, va introduce o etapă nouă, deschisă, creativă, interactivă, atractivă, motivantă și vitală. Părinții își încurajează copiii să învețe, le oferă condiții și resurse, financiare și emoționale, și sprijină activitățile școlare. Ei sunt implicați activ în educația copiilor lor. Comunitatea locală se implică în evenimentele locale și în activitățile și inițiativele școlare. Părinții se implică în sprijinirea copiilor lor în activitățile acestora, în special în învățarea matematicii.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Băcăș M.D. (2013), *Instruirea interactivă. Repere axiologice și metodologice*. Iași, Editura Polirom
- [2] Fatmawati N., Tatang H. și Kisno K. (2021), *Îndrumarea părinților privind învățarea matematicii pentru elevii din clasele inferioare în timpul pandemiei Covid-19*. Turkish Journal of Computer and Mathematics Education 12, nr. 14 538-545.
- [3] Cheung S. K. și Kwan J. L. Y. (2021), *Obiectivele percepute de părinți pentru învățarea matematicii timpurii și relațiile lor cu motivația copiilor de a învăța matematică*. Early Childhood Research Quarterly
- [4] Williams K., Williams H. (2021) *Temele pentru acasă de rezolvare a problemelor de matematică ca mijloc de implicare a părinților în învățare. Evaluarea unui studiu pilot*. Educational Review
- [5] Ardelean A., Mandrut O., Catană L., Mandrut M., Badea D., Mihail R. Dan, S. (2012), *Didactica formării competențelor*, Editor: Vasile Goldiș, University Press, Arad ISBN 978-973-664-578-5

PROIECTAREA UNITĂȚII DE ÎNVĂȚARE „INELE DE POLINOAME“

Teodora CRISTEA ¹, Alina ALB LUPAȘ ²

¹ Studentă anul II Master, Structuri matematice fundamentale, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea, teocristea95@yahoo.com

² Conf. univ. dr. la Departamentul de Matematică și Informatică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea, alblupas@gmail.com

Rezumat: Studiul inelelor de polinoame are o importanță deosebită în matematică, iar modul de predare al acestora influențează înțelegerea noțiunilor și aplicarea lor de către elevi.

Cuvinte cheie: polinoame

Deoarece elevii, deja în clasele mai mici sunt familiarizați cu noțiunea de monoame, conform programei actuale de matematică primele noțiuni legate de monoame sunt introduse în clasa a VII-a, în capitolul *Numere reale, Calcule cu numere reale reprezentate prin litere*, predarea *Inelelor de polinoame* nu prezintă greutăți deosebite la clasa a XII-a, iar elevii își largesc orizontul matematic prin abordarea acestei teme prin prisma structurilor algebrice, dobândesc la timp cunoștințele necesare altor discipline (fizică, chimie, informatică, etc). Polinoamele constituie o etapă fundamentală în formarea capacităților de abstractizare a elevilor. Calculul cu polinoame stă la baza celor mai multe tehnici matematice.

Predarea *Inelelor de polinoame* vizează următoarele **obiective de referință**, realizarea lor reprezentând una din cerințele obligatorii.

1. Recunoașterea și diferențierea mulțimilor de numere, a polinoamelor, a matricelor și a structurilor algebrice;
2. Identificarea unei structuri algebrice prin verificarea proprietăților acesteia;
3. Compararea proprietăților algebrice sau aritmetice ale operațiilor definite pe diverse mulțimi, în scopul identificării unor algoritmi;
4. Exprimarea proprietăților mulțimilor înzestrate cu operații prin identificarea organizării structurale a acestora;
5. Utilizarea similarității operațiilor definite pe mulțimi diferite în deducerea unor proprietăți algebrice;
6. Utilizarea calculelor algebrice în probleme practice uzuale;
7. Recunoașterea polinoamelor;
8. Aplicarea unor algoritmi în calculul polinomial sau în rezolvarea ecuațiilor algebrice;
9. Determinarea unor polinoame sau ecuații algebrice care îndeplinesc condiții date;
10. Aplicarea prin analogie, în calcule cu polinoame, a metodelor de lucru din aritmetica numerelor;

O unitate de învățare reprezintă o structură didactică și flexibilă, care are următoarele caracteristici:

- Determină formarea la elevi a unui comportament specific, generat prin integrarea unor obiective de referință;
- Este unitară din punct de vedere tematic;
- Se desfășoară în mod sistematic și continuu pe o perioadă de timp;
- Se finalizează prin evaluare.

Proiectarea unei unități de învățare se face într-un tabel ce conține următoarele rubrici:

Conținuturi unde apar inclusiv detalieri de conținut necesare în explicitarea anumitor parcursuri, respectiv în cuplarea lor la baza proprie de cunoaștere a elevilor;

Obiective de referință – se trec numerele obiectivelor de referință din programa școlară;

Activități de învățare – se trec activități care pot fi cele din programa școlară, sau altele, pe care profesorul le consideră adecvate pentru atingerea obiectivelor propuse;

Resurse – se trec specificări de timp, mijloace didactice, metode didactice;

Evaluare – se menționează instrumentele sau modalitățile de evaluare aplicate în clasă.

Fiecare unitate de învățare se încheie cu evaluare sumativă.

Apariția noilor programe, centrate pe achizițiile elevilor, impune anumite schimbări în didactica fiecărei discipline. Diversificarea metodelor de învățare, a modurilor și formelor de organizare a lecției, a situațiilor de învățare, constituie cheia schimbărilor pe care le preconizează noul curriculum. Asigurarea unor situații de învățare multiple creează premise pentru ca elevii să poată valorifica propriile abilități în învățare.

Metodele de învățare sunt scheme de acțiune identificate de teoriile învățării; ele sunt aplicate conținuturilor disciplinei studiate și reprezintă acțiuni interiorizate de elev. Sensul schimbărilor în didactica actuală este orientat spre formarea de **competențe**, adică a acelor *ansambluri structurate de cunoștințe și deprinderi dobândite prin învățare, care permit identificarea și rezolvarea unor probleme specifice, în contexte diverse.*

Învățarea nu mai poate avea ca unic scop memorarea și reproducerea de cunoștințe: în societatea contemporană, o învățare eficientă presupune explicarea și susținerea unor puncte de vedere proprii, precum și realizarea unui schimb de idei cu ceilalți. Pasivitatea elevilor în clasă, consecință a modului de predare prin prelegere, nu produce învățare decât în foarte mică măsură. De fapt, prelegerea presupune că toți elevii pot asimila aceleași informații, în același ritm, ceea ce este departe de realitate. Pentru elevi, este insuficient dacă, în timpul unei ore, ascultă explicațiile profesorului și văd o demonstrație sau un experiment. Este mult mai eficient dacă elevii participă în mod **activ** la procesul de învățare: discuția, argumentarea, investigația, experimentul, devin metode indispensabile pentru învățarea eficientă și de durată.

Așadar, învățarea devine eficientă doar atunci când îl punem pe elev să acționeze! Trecerea la o metodologie mai activă, **centrată pe elev**, implică elevul în procesul de învățare și îl învață aptitudinile învățării, precum și aptitudinile fundamentale ale muncii alături de alții și ale rezolvării de probleme. Metodele centrate pe elev implică individul în evaluarea eficacității procesului lor de învățare și în stabilirea obiectivelor pentru dezvoltarea viitoare.

În cele ce urmează, exemplificăm câteva dintre posibilele **situații de învățare activă** care se pot organiza în orele de matematică în cadrul capitolului *Inele de polinoame*, exemplificarea detaliată fiind făcută în proiectarea activităților de învățare de la sfârșitul capitolului.

1. Brainstorming

Metoda Brainstorming înseamnă formularea a cât mai multor idei – oricât de fanteziste ar putea părea acestea - ca răspuns la o situație enunțată, după principiul *cantitatea generează calitatea*. Conform acestui principiu, pentru a ajunge la idei viabile și inedite este necesară o productivitate creativă cât mai mare.

Vom exemplifica această metodă în rezolvarea unui exercițiu, în cadrul unei lecții de recapitulare și sistematizare din cadrul capitolului *Inele de polinoame*. **Rădăcini complexe ale polinoamelor – aplicații.** :

Avantajele utilizării metodei brainstorming sunt multiple. Dintre acestea enumerăm:

- obținerea rapidă și ușoară a ideilor noi și a soluțiilor rezolvitoare;
- costurile reduse necesare folosirii metodei;
- aplicabilitatea largă, aproape în toate domeniile;
- stimulează participarea activă și crează posibilitatea contagiunii ideilor;
- dezvoltă creativitatea, spontaneitatea, încrederea în sine prin procesul evaluării amânate;
- dezvoltă abilitatea de a lucra în echipă;

Dezavantajele brainstorming-ului:

- nu suplinește cercetarea de durată, clasică;
- depinde de calitățile moderatorului de a anima și dirija discuția pe făgașul dorit;
- oferă doar soluții posibile nu și realizarea efectivă;
- uneori poate fi prea obositor sau solicitant pentru unii participanți;

Etape	Exemplu
1. Alegerea sarcinii de lucru 2. Solicitarea exprimării într-un mod cât mai rapid a tuturor ideilor legate de rezolvarea problemei 3. Înregistrarea tuturor ideilor în scris (pe tablă). Anunțarea unei pauze pentru așezarea ideilor (de la 15 minute până la o zi). 4. Reluarea ideilor emise pe rând și gruparea lor pe categorii, simboluri, cuvinte cheie, etc. 5. Analiza critică, evaluarea, argumentarea, contraargumentarea ideilor emise anterior. Selectarea ideilor originale sau a celor mai apropiate de soluții fezabile pentru problema supusă atenției. 6. Afișarea ideilor rezultate în forme cât mai variate și originale: cuvinte, propoziții, colaje, imagini, desene, rezolvări, etc.	<i>Se trec în revistă obiectivul de referință și cele operaționale ale lecției, care sunt scrise din timp pe un poster. Se propune o problemă (din manual sau din culegerea de probleme). Să se determine parametrii reali m, n astfel încât ecuația $x^4 - x^3 - mx^2 - x + n = 0$ să aibă rădăcină dublă $x=1$ și să se rezolve ecuația dată.</i> <i>Cereți elevilor să propună strategii de rezolvare a problemei. Pot apărea, de exemplu, sugestii legate de divizibilitate, schema lui Horner, metoda identificării, metoda reducerilor succesive, relațiile lui Viète. Lăsați elevii să propună orice metodă le trece prin minte!</i> <i>Notați toate propunerile elevilor. La sfârșitul orei, puneți elevii să transcrie toate aceste idei și cereți-le ca, pe timpul pauzei, să mai reflecteze asupra lor.</i> <i>Pentru problema analizată, cuvintele-cheie ar putea fi: radacina dublă, divizibilitate, teorema restului.</i> <i>Puneți întrebări de tipul:</i> <i>Am putea rezolva problema în mai multe moduri? Ce înseamnă radacina dublă?</i> <i>Când două polinoame se divid? În câte moduri putem arăta că două polinoame sunt divizibile? Este util să studiem un caz particular al problemei? Care sunt relațiile între rădăcini și coeficienți? Ce anume trebuie să demonstrăm?</i> <i>Ca urmare a discuțiilor avute cu elevii, trebuie să rezulte strategia de rezolvare a problemei. Aceasta poate fi sintetizată sub forma unor indicații de rezolvare, de tipul:</i> 1) Dacă $x=1$ este rădăcină dublă a polinomului $f = X^4 - X^3 - mX^2 - X + n$, atunci acesta se divide prin $(X-1)^2$ și deci restul împărțirii celor două polinoame este polinomul nul. 2) În schema lui Horner cerem ca $x=1$ să fie rădăcină dublă, deci $-m+n-1=0$ și $-m=0$. 3) Dacă $x=1$ este rădăcină dublă a ecuației atunci trebuie să avem egalitatea: $x^4 - x^3 - mx^2 - x + n = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + \alpha x + \beta)$. Folosim metoda identificării coeficienților. 4) Dacă $P = X^2 - 2X + 1$, $Q = X^4 - X^3 - mX^2 - X + n$, atunci cel mai mare divizor comun dintre P și Q trebuie să fie P. (metoda reducerilor succesive) 5) Din enunț $x_1 = x_2 = 1$. Având o relație între rădăcini vom asocia acesteia relațiile lui Viète.

2. Știu-vreau să știu –am învățat este o metodă care trece în revistă ceea ce elevii știu despre temă și apoi se formulează întrebări la care se așteaptă găsirea răspunsului în lecție; întrebările pot apărea în urma dezacordului privind unele detalii sau pot fi produse de curiozitatea elevilor.

1. Cu grupuri mici sau cu întreaga clasă se trece în revistă ceea ce elevii știu deja despre o anumită temă și se formulează întrebări la care se așteaptă găsirea răspunsului în lecție.

2. Se cere elevilor să formeze perechi și să facă o listă cu tot ce știu despre tema ce urmează a fi discutată în cadrul orei. Între timp li se dă și un tabel cadru cu trei coloane:

Știu (ce credem că știm?)	Vreau să știu (ce vrem să știm?)	Am învățat (ce am învățat?)

3. Li se cere câtorva perechi să spună celorlăți ce au scris pe listele lor, iar în tabelul de pe tablă se vor nota lucrurile cu care toți sunt de acord.

4. După completarea primei coloane a tabelului li se va cere elevilor să formuleze întrebări despre lucrurile cu care nu sunt siguri. Aceste întrebări pot apărea în urma dezacordului privind unele detalii sau pot fi produsul curiozității elevilor. Ele vor fi trecute în coloana din mijloc.

5. În continuare li se va cere elevilor să rezolve un exercițiu pe tema lecției.

6. După rezolvarea exercițiului, se va reveni la întrebările pe care le-au formulat înainte de a rezolva exercițiul și pe care le-au trecut în coloana “Vreau să știu”. Se va verifica la care întrebări s-au găsit răspunsuri și se vor trece aceste răspunsuri în coloana “Am învățat”. În continuare elevii vor verifica ce alte informații au găsit în rezolvarea exercițiului și care nu au legătură cu nici una din întrebările puse la început și le vor trece și pe acestea în coloana “Am învățat”.

7. În final se vor trece în revistă cu elevii întrebările care au rămas fără răspuns și se va discuta posibilitatea găsirii unor surse care să furnizeze răspunsuri la aceste întrebări.

Aplicarea metodei în cadrul lecției: **Formarea ecuației de grad n**

Obiectivul lecției: - formarea ecuației de grad n când se cunosc rădăcinile.

Se dă ecuația: $x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$, cu rădăcinile: x_1, x_2, x_3 . Scrieți ecuația în y , ale cărei rădăcini sunt: $y_1 = x_1 + 2; y_2 = x_2 + 2; y_3 = x_3 + 2$.

Știu (ce credem că știm?)	Vreau să știu (ce vrem să știm?)	Am învățat (ce am învățat?)
- definiția polinoamelor cu coeficienți complecși - operarea cu polinoame - relațiile lui Viete - calculul sumelor $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$ pentru $n=1,2,3,4$ - descompunerea lui f în factori primi: Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt n rădăcini ale lui f în $\mathbb{R}$, atunci $f(X) = a_0 (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n)$	Cum formăm ecuația de grad II, când cunoaștem rădăcinile x_1, x_2? Cum formăm ecuația de grad III, când cunoaștem rădăcinile x_1, x_2, x_3? Care este forma ecuației în y? Ce rol au relațiile lui Viete în formarea ecuației? Care este forma generală a ecuației care are rădăcinile $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$? Se poate forma ecuația în y fără a folosi relațiile lui Viete?	(se rezolvă exercițiul propus, în urma căruia elevii vor verifica la care întrebări au găsit răspunsul și ce alte informații au găsit) - formarea ecuației de grad n când se cunosc rădăcinile.

Avantajele acestei metode:

- Se clarifică ceea ce se știe, ceea ce nu se știe și ceea ce mai rămâne de învățat
- Este o modalitate de învățare interactivă
- Mobilizează întregul colectiv de elevi
- Interdisciplinaritatea
- Este o modalitate pragmatică de abordare a lecției

Dezavantaje:

- Poate fi uneori time-consuming (costisitoare din punct de vedere al timpului)
- Nu se pretează la absolut toate lecțiile

Modalitatea introducerii în lecție a metodei este următoarea: primele două coloane se

folosesc ca warm-up, a treia coloană se folosește pentru fixarea cunoștințelor. Punctele neacoperite din coloana a doua se folosesc ca repere pentru fixarea obiectivelor lecțiilor următoare, sau pot constitui tema de casă.

Metoda are un impact bun asupra elevilor deoarece:

- Îi conștientizează asupra desfășurării lecției
- Sporește responsabilitatea
- Stimulează dorința de cunoaștere
- Duce la dezvoltarea unui stil de muncă riguros, științific posibil de aplicat și în alte domenii.

3. Cubul - metodă modernă de învățare prin cooperare - este o modalitate de lucru care poate fi aplicată individual, în perechi sau în grupuri pentru o abordare a unei situații problematice, prin solicitarea gândirii elevului;

- profesorul le cere elevilor să scrie despre un anumit concept sau temă prin parcurgerea fețelor cubului. Este preferabil să se respecte ordinea prezentată pentru că aceasta îi conduce pe elevi în mod treptat spre o gândire complexă.

Etapele acestei metode corespund celor 6 fețe ale unui cub:

Describe! – explică/definește o noțiune un concept

Compară! – stabilește asemănări și deosebiri

Asociază! – la ce te face să te gândești?

Aplică! – ce aplicabilitate practică poate avea?

Analizează! – analizează conceptual din diferite puncte de vedere

Argumentează pro sau contra! – este bine/rău, util/nefolositor?

Fiecare instrucțiune/cerință de pe fațeta cubului presupune sarcini de lucru.

În echipele constituite pentru atingerea unui obiectiv, care nu au un caracter permanent, membrii au roluri diferite în funcție de înclinațiile lor personale și de nevoile echipei.

Profilul unui membru al echipei, rolul care i se potrivește cel mai bine, poate fi stabilit pe baza următoarelor caracteristici:

- relaționarea cu ceilalți membri;
- modul în care participă la luarea deciziilor;
- căile prin care obține informațiile și utilizarea lor;
- metoda preferată în organizarea activității

Descrierea metodei asupra lectiei: **Operații cu polinoame** (vezi proiect didactic nr 3)

Lecție de fixare și consolidare a cunoștințelor.

Se arată elevilor un cub din carton (care trebuie imaginat un polinom) având fețele colorate diferit, fiind inscripționate cu următoarele verbe active:

Fața 1: Albastru - verbul descrie

Fața 2: Roșu - verbul compară

Fața 3: Verde - verbul asociază

Fața 4: Negru - verbul analizează

Fața 5: Roz - verbul aplică

Fața 6: Portocaliu - verbul argumentează

Elevii sunt împărțiți în 6 grupe eterogene, nu neapărat egale numeric.

Fiecare grupă primește o coală colorată în nuanțele precizate mai sus. Echipele aleg un lider de grup care va arunca zarul pentru a vedea fața pe care este scris verbul definitiv pentru acea grupă (descrie, compară, asociază, analizează, aplică și argumentează).

Se anunță tema de discutat și timpul de lucru alocat fiecărei grupe. Se anunță obiectivele lecției de fixare și consolidare. Se împart fișele cu sarcinile de lucru în grup (vezi anexele 1- 6 proiect didactic nr 3). Timp de 20-25 de minute elevii lucrează în echipă la sarcina de lucru primită. Profesorul supraveghează activitatea elevilor și dă indicații acolo unde este nevoie. Soluționează

eventual și situațiile în care nu toți elevii se implică în cadrul activității de grup sau atunci când un elev monopolizează toate activitățile.

Desfășurarea activității elevilor:

Elevii care primesc fișa cu verbul **descrie** vor avea de definit polinomul, dat exemple de polinoame în forma algebrică cu coeficienți în $Q[X]$, $R[X]$, $Z_3[X]$, de definit gradul unui polinom, să descrie operațiile cu polinoame, valoarea unui polinom.

Elevii care primesc fișa cu verbul **compară** vor stabili asemănări și deosebiri între noțiunile studiate: între polinomul f , funcția polinomială, ecuația asociată; analogii și comparații între $\text{grad}(f+g)$, $\text{grad}(fg)$, între valoarea unui polinom într-un punct de forma $\alpha = a + \sqrt{b}$ și $\alpha = a - \sqrt{b}$ sau $\alpha = a+bi$ și $\alpha = a-bi$ (generalizare).

Elevii care vor avea fișa cu verbul **asociază**, vor asocia fiecărei noțiuni formulele de calcul sau proprietatea ce i se asociază (exemplu: pentru determinarea restului împărțirii unui polinom f la g folosim: ...), apoi vor da câte un exemplu pentru fiecare.

Pentru grupa care va avea de **analizat**, sarcina de lucru va cere ca elevii să analizeze diferite proprietăți ale polinoamelor, să discute în funcție de parametrul m gradul polinomului, să determine parametrii a, b, c în funcție de condițiile impuse, să analizeze în câte moduri se poate rezolva problema propusă.

Elevii care vor primi fișa cu verbul **aplică** vor avea de rezolvat diferite aplicații cu polinoame.

Elevii ce vor primi fișa cu verbul **argumentează** vor avea de analizat și justificat în scris exercitii "capcană". (exemplu: de ce nu se poate aplica teorema împărțirii cu rest în $Z_6[X]$ pentru orice polinoame, argumentează afirmația polinomul f este divizibil prin $g = X-a \Leftrightarrow f(a) = 0 \Leftrightarrow a$ este rădăcină a polinomului f .) Li se poate cere să realizeze și scurte demonstrații sau să descopere greșeala dintr-o redactare a unei rezolvări.

Evaluare:

După expirarea timpului de lucru (20-25 min) se va aplica metoda „turul galeriei”.

Materialele realizate, posterele, vor fi expuse în clasă în 6 locuri vizibile. Elevii din fiecare grup își vor prezenta mai întâi sarcina de lucru și modul de realizare a ei, apoi, la semnalul dat de profesor, vor trece, pe rând pe la fiecare poster al colegilor de la altă grupă și vor acorda acestora o notă. După ce fiecare grup a vizitat „galeria” și a notat corespunzător producțiile colegilor, se vor discuta notele primite și obiectivitatea acestora, se vor face aprecieri și se vor corecta eventualele erori.

În finalul orei se va da fiecărei echipe un material informativ ca premiu.

Se realizează și un moment de reflecție asupra metodelor noi folosite și asupra modului de implicare a fiecărui elev în echipa sa.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Bănea, H. (1998), *Metodica predării matematicii*, Ed. Paralela 45
- [2] Ion I.D., Popescu D., Niță C, Radu, N. (1981), *Probleme de algebră*, E.D.P. București
- [3] Ion, I.D., Niță, C, Năstăsescu, C. (1984). *Complemente de algebră*, Edit. Șt. București
- [4] Năstăsescu, C, Niță C, Brandiburn M, Joița D. (1983). *Exerciții și probleme de algebră pentru clasele IX-XII*, E.D.P. București
- [5] Năstăsescu C, Niță C, Vraciu C. (1986). *Bazele algebrei*, Ed. Academiei București
- [6] Panaitopol, L, Drăghicescu, I.C. (1980). *Polinoame și ecuații algebrice*, Ed. Albatros București
- [7] Purdea, I. (1982). *Tratat de algebră modernă*, Ed. Academiei București
- [8] Rus, I., Varna, D. (1983). *Metodica predării matematicii*, E.D.P. București

APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE ÎN TEORIA ȘIRURILOR

Vicu Matei DRAGOȘ

Colegiul Național "Octav Onicescu", sector 4, București, profesor de matematică, mateid1971@gmail.com

Rezumat: Problema prezentată este o inegalitate. Ea utilizează în demonstrație inegalitatea lui Cebîșev pentru integralele definite, după care se demonstrează că avem șirurile sume Riemann a căror limite sunt integrale definite. Mai întâi s-au verificat condițiile inegalității lui Cebîșev. S-a demonstrat că fiecare șir este o sumă Riemann convergentă.

Este o problemă complexă ce înglobează analiza matematică de clasa a XI-a (monotonie) și clasa a XII-a (șirurile Riemann ca aplicații ale integralelor definite).

Cuvinte cheie: integrala definită, șiruri

Problemă:

Fie șirurile (a_n) și (b_n) cu $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\arctan \frac{k}{n}}$ și $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{(n^2 + k^2) \sqrt{n^2 + k^2}}$.

Dacă $L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ și $L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, să se arate că: $L_1 \cdot L_2 \geq \frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} - 1}{2}$.

Rezolvare:

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\arctan \frac{k}{n}}.$$

Fie funcția $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{\arctan x}$.

Funcția f este continuă pe intervalul $[0,1]$ ca funcție elementară $\Rightarrow$ funcția f este integrabilă pe intervalul $[0,1]$.

Fie $\Delta_n = (x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < \dots < x_{k-1} = \frac{k-1}{n} < x_k = \frac{k}{n} < \dots < x_n = \frac{n}{n} = 1)$, diviziunea echidistantă a intervalului $[0,1]$; $x_n - x_{n-1} = \frac{1}{n}, k = \overline{1, n}$.

$$\|\Delta\| = \max(x_n - x_{n-1}) = \frac{1}{n}; \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Vom alege punctele intermediare $\xi_k \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}], k = \overline{1, n}$. Alegem $\xi_k = \frac{k}{n}, k = \overline{1, n}$.

$$\begin{aligned} \text{Atunci } a_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\arctan \frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} e^{\arctan \frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) e^{\arctan \frac{k}{n}} = \\ &= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k) = \sigma_{\Delta_n}(f(\xi_k)) \text{ (sumă Riemann)}. \end{aligned}$$

$$\text{Avem că } L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^{\arctan x} dx.$$

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{(n^2 + k^2) \sqrt{n^2 + k^2}} = \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{n^3 \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \sqrt{n^2 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \sqrt{n^2 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Fie funcția } g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{(1+x^2) \sqrt{1+x^2}}$$

Funcția g este continuă pe intervalul $[0,1]$ ca funcție elementară $\Rightarrow$ funcția g este integrabilă pe intervalul $[0,1]$.

Fie $\Delta_n = \left(x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < \dots < x_{k-1} = \frac{k-1}{n} < x_k = \frac{k}{n} < \dots < x_n = \frac{n}{n} = 1 \right)$, diviziunea echidistantă a intervalului $[0,1]$; $x_n - x_{n-1} = \frac{1}{n}, k = \overline{1, n}$.

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) g\left(\frac{k}{n}\right).$$

Vom alege punctele intermediare $\xi_k \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], k = \overline{1, n}$. Alegem $\xi_k = \frac{k}{n}, k = \overline{1, n}$.

Atunci $b_n = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) g(\xi_k) = \sigma_{\Delta_n}(g(\xi_k))$ (sumă Riemann).

$$\text{și } L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Funcțiile $f, g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{\arctg x}, g(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ sunt continue și derivabile pe intervalul $[0,1]$; $f'(x) = \frac{e^{\arctg x}}{x^2+1}, g'(x) = \frac{-3x}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}, x \in [0,1]$.

Avem că: $f'(x) > 0, x \in [0,1] \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[0,1]$;
 $g'(x) < 0, x \in [0,1] \Rightarrow g$ este strict descrescătoare pe $[0,1]$.

Inegalitatea lui Cebâșev:

Fie $f, g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, două funcții continue și monotone.

Dacă:

f, g au aceeași monotonie, atunci:

$$\left(\int_a^b f(x) dx \right) \cdot \left(\int_a^b g(x) dx \right) \leq (b-a) \int_a^b (f \cdot g)(x) dx$$

f, g au monotonii diferite, atunci:

$$\left(\int_a^b f(x) dx \right) \cdot \left(\int_a^b g(x) dx \right) \geq (b-a) \int_a^b (f \cdot g)(x) dx$$

Deci, cum f și g au monotonii diferite pe $[0,1]$, avem din inegalitatea lui Cebâșev că:

$$\left(\int_0^1 e^{\arctg x} dx \right) \cdot \left(\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} dx \right) \geq (1-0) \int_0^1 \frac{e^{\arctg x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$\text{Calculăm } I = \int_0^1 \frac{e^{\arctg x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$\text{Știm că } (e^{\arctg x})' = \frac{e^{\arctg x}}{(1+x^2)}$$

$$I = \int_0^1 \frac{e^{\arctg x}}{(1+x^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 (e^{\arctg x})' \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx =$$

$$= e^{\arctg x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{\arctg x} \cdot \frac{-1}{(1+x^2)} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} dx =$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} - 1 + \int_0^1 \frac{e^{\arctg x}}{(1+x^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx =$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} - 1 + e^{\arctg x} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{\arctg x} \cdot \frac{-1}{(1+x^2)} \cdot \left(\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{1+x^2})} \right) dx =$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} - 0 - \int_0^1 \frac{e^{\arctg x}}{(1+x^2)} \cdot \left(\frac{(x^2+1-x^2)}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx =$$

$$= \frac{2e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} - 1 - \int_0^1 \frac{e^{\arctg x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx =$$

$$= \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} - 1 - I.$$

$$2I = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} - 1 \Rightarrow I = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} - 1}{2} \Rightarrow L_1 \cdot L_2 \geq \frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} - 1}{2}$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] Demidovich B. (1976). *Problems in Mathematical Analysis*, Mir Publishers, Moscow, English Translations, Mir Publishers
- [2] Ganga M. *Matematică*, (2006), Manual pentru clasa a XI-a, profil M1, Elemente de analiză matematică, editura Mathpress
- [3] Ganga M. *Matematică*, (2007), Manual pentru clasa a XII-a, profil M1, Elemente de analiză matematică, editura Mathpress

TETRAEDRE ORTOCENTRICE

Luminița DUMITRESCU

Colegiul Național "Octav Onicescu", sector 4, București, profesor de matematică, luminita.dumitrescu@ismb.ro

Rezumat: Spre deosebire de triunghi, în care cele trei înălțimi sunt întotdeauna concurente, înălțimile unui tetraedru nu sunt întotdeauna concurente. Un tetraedru ale cărui înălțimi sunt concurente, poartă numele de tetraedru ortocentric, iar punctul lor de concurență se numește ortocentrul acestui tip de tetraedru. În acest articol voi pune în evidență prin câteva probleme, proprietățile tetraedrelor ortocentrice.

Cuvinte cheie: tetraedru ortocentric, perpendicularitate

Definiție:

Perpendicularele duse din vârfurile unui tetraedru pe fețele opuse, poartă numele de înălțimi ale tetraedrului.

Tetraedrul la care toate cele patru înălțimi trec prin același punct se numește tetraedru ortocentric. Punctul de intersecție al înălțimilor se numește ortocentrul tetraedrului.

Problema 1:

Tetraedrul $ABCD$ este ortocentric dacă și numai dacă bimedianele sale sunt congruente.

Demonstrație:

Fie M, N, P, Q, R, S mijloacele segmentelor AB, BC, CD, DA, DB, DC . Atunci bimedianele sunt: MP, NQ, RS .

" $\Rightarrow$ " Dacă $ABCD$ este ortocentric, atunci $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 = DB^2 + AC^2$. Dar:

$$4MP^2 = BC^2 + AD^2 + DB^2 + AC^2 - AB^2 - CD^2 = AB^2 + CD^2$$

$$4NQ^2 = AB^2 + CD^2 + DB^2 + AC^2 - BC^2 - AD^2 = AB^2 + CD^2$$

$$4RS^2 = AB^2 + CD^2 + BC^2 + AD^2 - DB^2 - AC^2 = AB^2 + CD^2$$

Rezultă: $MP = NQ = RS$.

" $\Leftarrow$ " Dacă $MP = NQ = RS$, avem:

$$\begin{aligned} \text{din } MP = NQ &\Rightarrow BC^2 + AD^2 + DB^2 + AC^2 - AB^2 - CD^2 = AB^2 + CD^2 + DB^2 + AC^2 - BC^2 - AD^2 \Rightarrow \\ 2BC^2 + 2AD^2 &= 2AB^2 + 2CD^2 \Rightarrow BC^2 + AD^2 = AB^2 + CD^2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{din } NQ = RS &\Rightarrow AB^2 + CD^2 + BC^2 + AD^2 - DB^2 - AC^2 = AB^2 + CD^2 + BC^2 + AD^2 - DB^2 - AC^2 \Rightarrow \\ 2DB^2 + 2AC^2 &= 2BC^2 + 2AD^2 \Rightarrow DB^2 + AC^2 = BC^2 + AD^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 = DB^2 + AC^2 \Rightarrow ABCD$ tetraedru ortocentric.

Problema 2:

Fie tetraedrul $ABCD$ astfel încât $DA = DB = DC = a$ și $\angle BDC = 60^\circ$, $\angle CDA = 120^\circ$ și $\angle BDC = 90^\circ$.

(i) să se afle volumul tetraedrului;

(ii) să se afle înălțimile tetraedrului și să se evedențieze acestea;

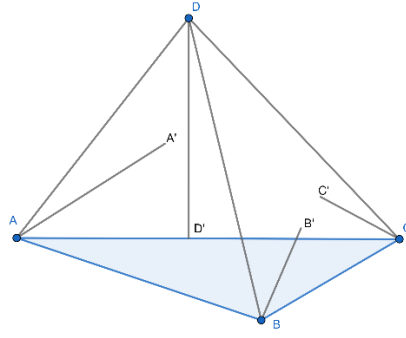
Demonstrație:

(i) În $\triangle BDC$, $BC = a$; în $\triangle ADC$, $AC = a\sqrt{3}$; în $\triangle ADB$, $AB = a\sqrt{2}$. Aplicând reciproca Teoremei lui Pitagora în $\triangle ABC \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ \Rightarrow S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Fie $D' \in AC$ astfel încât $D'A = D'C \Rightarrow DD' \perp AC$, $DD' = \frac{a}{2}$, $D'B = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Aplicând reciproca Teoremei lui Pitagora în $\triangle DD'B \Rightarrow \angle DD'B = 90^\circ$.

$DD' \perp D'B$, $DD' \perp AC \Rightarrow DD' \perp (ABC)$, deci am găsit înălțimea din D .

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DD' \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$



(ii) Fie $AA' \perp (DBC)$, cu $A' \in (DBC)$

$BB' \perp (ADC)$, cu $B' \in (ADC)$

$CC' \perp (ADB)$, cu $C' \in (ADB)$.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{DBC} \cdot AA' \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot AA' \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot AA' = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow AA' = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow AA' = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

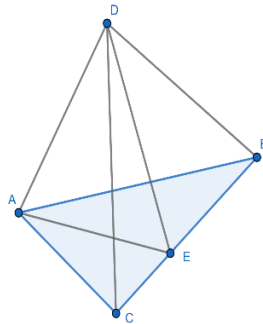
$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ADB} \cdot CC' \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot CC' \Rightarrow \frac{a^2}{6} \cdot CC' = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \Rightarrow CC' = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow CC' = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ADC} \cdot BB' \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot BB' \Rightarrow \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \cdot BB' = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \Rightarrow BB' = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow BB' = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Problema 3:

La orice tetraedru ortocentric, suma unghiurilor formate de muchii cu fețe, plus suma unghiurilor corespunzătoare diedrelor este egală cu 12 unghiuri drepte.

Demonstrație:



Construiesc $AE \perp BC$, $E \in BC$, $ABCD$ tetraedru ortocentric $\Rightarrow BC \perp AD$.

Rezultă $BC \perp (AED) \Rightarrow BC \perp DE$.

$$pr_{(ABC)} AD = AE \Rightarrow \sphericalangle(AD, (ABC)) = \sphericalangle(AD, AE) = \sphericalangle DAE$$

$$pr_{(BCD)} AD = DE \Rightarrow \sphericalangle(AD, (BCD)) = \sphericalangle(AD, DE) = \sphericalangle ADE$$

$$\left. \begin{array}{l} AE \perp BC \\ DE \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow \sphericalangle((ABC), (DBC)) = \sphericalangle(AE, DE) = \sphericalangle AED.$$

Observăm că cele trei unghiuri obținute: $\sphericalangle DAE$, $\sphericalangle ADE$, $\sphericalangle AED$ sunt unghiurile triunghiului ADE , deci $\sphericalangle DAE + \sphericalangle ADE + \sphericalangle AED = 180^\circ$.

Fiecare muchie a tetraedrului face unghiuri cu fețele în care ea nu este inclusă, deci două unghiuri; în total 12 unghiuri. Corpul are patru plane, două câte două secante, deci $C_4^2 = 6$ unghiuri diedre.

Unghiurile ale căror măsuri le adunăm sunt $12+6=18$; în demonstrația de mai sus am observat că

fiecare $2+1$ se încadrează ca unghiuri ale unui triunghi. Deci suma cerută este $6 \cdot 180^0 = 6 \cdot 2 \cdot 90^0 = 12 \cdot 90^0$ (q.e.d.).

Problema 4:

Într-un tetraedru ortocentric, produsul muchiilor opuse este invers proporțional cu distanțele dintre dreptele opuse.

Demonstrație:

Fie $ABCD$ tetraedru ortocentric. Notez $x=d(AB, CD)$, $y=d(BC, AD)$, $z=d(BD, AC)$.

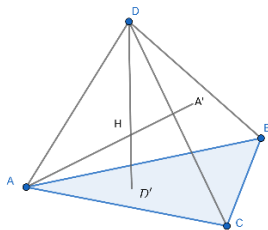
Din formula volumului tetraedrului: $6 \cdot V = AB \cdot CD \cdot d(AB, CD)$, rezultă că:

$6 \cdot V = AB \cdot CD \cdot x = BC \cdot AD \cdot y = BD \cdot AC \cdot z$, ceea ce exprimă faptul că $\{AB \cdot CD; BC \cdot AD; BD \cdot AC\}$ și $\{x; y; z\}$ sunt invers proporționale.

Problema 5:

Să se arate că la orice tetraedru ortocentric perpendicularele comune ale muchiilor opuse trec prin ortocentrul tetraedrului.

Demonstrație:



Fie $ABCD$ tetraedru ortocentric

$DD' \perp D'B$, $DD' \perp AC \Rightarrow DD' \perp (ABC)$, deci am găsit înălțimea din D .

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DD' \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}.$$

(ii) Fie $AA' \perp (DBC)$, cu $A' \in (DBC)$

$BB' \perp (ADC)$, cu $B' \in (ADC)$

$CC' \perp (ADB)$, cu $C' \in (ADB)$.

$AA' \cap DD' = \{H\}$, $(ADH) \cap BC = \{E\}$. Evident $BC \perp (ADE) \Rightarrow BC \perp EF$, unde $EH \cap AD = \{F\}$.

În triunghiul ADE , AA' și DD' sunt înălțimi, deci $EF \perp AD$, $H \in EF$, H - ortocentrul $\triangle ADE$. Deci avem $EF \perp BC$, $E \in BC$; $EF \perp AD$, $F \in AD$ și $H \in EF$, H - ortocentrul tetraedrului.

$ABCD$ este tetraedru ortocentric, prin urmare, repetând raționamentul că și perpendicularele comune ale perechilor de muchii opuse (AB, DC) și (AC, DB) trec prin H , am răspuns cerinței problemei.

Problema 6:

Într-un tetraedru ortocentric $ABCD$, ortocentrul H divide înălțimile și perpendicularele comune ale muchiilor opuse în segmente orientate al căror produs este constant. (Jacobi - 1834)

Demonstrație:

Știm că ortocentrul unui triunghi determină pe fiecare înălțime segmente al căror produs este constant, avem: $HA \cdot HA' = HD \cdot HD' = HE \cdot HF$. În $\triangle ADE$ avem ca înălțimi două dintre înălțimile tetraedrului și perpendiculara comună a dreptelor AD și BC . Analog, pentru DD' , CC' și perpendiculara comună a dreptelor BA și DC și respectiv, DD' , BB' și perpendiculara comună a dreptelor AC și DB . Deci în fiecare din cele trei triunghiuri considerate a apărut segmentul DD' și cum $HD \cdot HD'$ este același, rezultă că H împarte cele șapte segmente considerate în segmente al căror produs este constant.

Problema 7:

Dacă H este ortocentrul tetraedrului $ABCD$, atunci D este ortocentrul tetraedrului $ABCH$.

Demonstrație:

H - ortocentrul tetraedrului $ABCD \Rightarrow HA \perp (DBC); HB \perp (DAC); HC \perp (DBA); HD \perp (ABC)$.

$$\left. \begin{array}{l} HC \perp (DBA) \Rightarrow HC \perp AD \\ HB \perp (ADC) \Rightarrow HB \perp AD \end{array} \right\} \Rightarrow AD \perp (HBC)$$

$$\left. \begin{array}{l} HC \perp (DBA) \Rightarrow HC \perp BD \\ HA \perp (DBC) \Rightarrow HA \perp DB \end{array} \right\} \Rightarrow DB \perp (HCA)$$

Analog se arată că $DC \perp (HAB)$.

Am obținut: $DH \perp (ABC); DA \perp (HBC); DB \perp (HCA); DC \perp (HAB)$. Rezultă că D este ortocentrul tetraedrului $ABCH$.

Observații:

1. Analog se arată că A este ortocentrul tetraedrului $BCDH$, B este ortocentrul tetraedrului $ACDH$ și C este ortocentrul tetraedrului $ABDH$.
2. Această problemă este generalizarea în spațiu a problemei de geometrie plană: “dacă H este ortocentrul triunghiului ABC , atunci A este ortocentrul triunghiului BCH , ...”
3. Deosebirea dintre problema în plan și problema în spațiu este că, dacă cea din plan are loc pentru orice triunghi, cea din spațiu are loc numai pentru tetraedrul ortocentric, pentru că numai la acesta înălțimile sunt concurente, deci avem ortocentru.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Nicolescu, L., Boskoff V. (1990). *Probleme practice de geometrie*, Editura Tehnică, București
- [2] Duican L. Duican I. (1987). *Transformări geometrice*, Editura Științifică și Enciclopedică, București
- [3] Simionescu Gh. D. (1978). *Probleme de sinteză de geometrie plană și în spațiu*, Editura Tehnică
- [4] Stere I., Marcel Ț. Etc. (1983), *Culegere de probleme de geometrie și trigonometrie*, Editura Didactică și Pedagogică

PRODUS A N-NUMERE COMPLEXE FOLOSIND NOȚIUNEA DE DETERMINANT

Denisa Anamaria FARC ¹, Georgia Irina OROS ²

¹ Studentă anul II Matematică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea, farcdenisa@gmail.com

² Conf. univ. dr. la Departamentul de Matematică și Informatică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea, georgia_oros_ro@yahoo.co.uk

Rezumat: În această lucrare vom pune în evidență un alt mod de a scrie produsul a n numere complexe, anume cu ajutorul formei trigonometrice a unui număr complex, folosind definiția determinantului de ordin doi și trei.

Cuvinte cheie: numere complexe, determinant

INTRODUCERE

Mulțimea numerelor complexe a apărut din necesitatea extinderii noțiunii de număr, având ca punct de pornire mulțimea numerelor reale, cu scopul ca orice ecuație de gradul al doilea să aibă soluții.

Prezentăm pe scurt fiecare mulțime de numere reale:

Mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ cu proprietatea de a fi ordonată față de relația „ $m < n$ ”. Pe această mulțime $\mathbb{N}$ se pot defini două operații: adunare și înmulțire (legi interne).

$$a + b = c \quad \forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow c \in \mathbb{N}$$

$$a \cdot b = c \quad \forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow c \in \mathbb{N}$$

Dacă însă rezolvăm ecuația $a + x = b$, cu $a, b \in \mathbb{N}$, atunci $x = b - a \in \mathbb{N}$ numai dacă $b \geq a$. Dacă $b - a \notin \mathbb{N}$, remarcăm că operația opusă adunării, scăderea nu conduce întotdeauna la un număr natural. Obținem astfel o nouă mulțime, notată $\mathbb{N}' = \{0, -1, -2, \dots, -n, \dots\}$, pe care o numim mulțimea numerelor naturale negative.

Reuniunea mulțimilor naturale și naturale negative, obținem mulțimea numerelor întregi, notată cu $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}' = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$. Și mulțimea numerelor întregi este total ordonată față de „ $m < n$ ” și are proprietatea de a fi o mulțime închisă față de operațiile: adunare, scădere și înmulțire.

Fie acum ecuația: $a \cdot x = b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ și $x = \frac{b}{a}$, $a \neq 0$. Această soluție rămâne în $\mathbb{Z}$ numai dacă b este un multiplu al lui a .

Raportul $\frac{b}{a}$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$ se numește număr rațional. Reuniunea mulțimii numerelor întregi cu mulțimea numerelor de forma $\frac{b}{a}$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$ formează mulțimea numerelor raționale, notată $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{b}{a} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0 \right\}$ și au loc incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Mulțimea numerelor raționale este o mulțime total ordonată față de relația „ $m < n$ ” și are în plus proprietatea de a fi „densă”. Această proprietate ne spune că între două numere raționale există un alt număr rațional. Între mulțimea numerelor raționale și punctele unei axe se poate stabili o corespondență biunivocă. Fiecărui număr rațional îi corespunde un punct pe axă și reciproc. Numărul rațional a se va numi abscisa punctului M .

Dacă ne propunem să rezolvăm o ecuație de forma $x^2 - 2 = 0$, atunci $x = \sqrt{2}$. Încă din antichitate s-a arătat că $\sqrt{2}$ nu este un număr rațional, adică nu există două numere întregi p, q , prime între ele, astfel încât $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p > 0$, $q > 0$ sau $p < 0$, $q < 0$.

Numerele $\sqrt{2}$, π , e , .. sunt numite numere iraționale.

Reuniunea numerelor raționale și iraționale formează mulțimea numerelor reale, notată $\mathbb{R}$. Pentru mulțimea numerelor iraționale vom folosi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Vom defini numărul irațional:

Definiția 1: Un număr real care nu este rațional se numește număr irațional.

Definiția 2: Un număr real x este un număr irațional dacă și numai dacă reprezentarea sa zecimală este infinită și neperiodică. (această definiție ne dă posibilitatea de a recunoște numerele iraționale).

În practică, numerele iraționale se înlocuiesc cu numere raționale $\sqrt{2} \simeq 1,41, \pi \simeq 3,14$.

Dacă în mulțimea numerelor reale ne propunem să rezolvăm ecuația $x^2 + 1 = 0$, remarcăm că nu are soluții în $\mathbb{R}$. Într-adevăr, nu există nici un număr real x pozitiv sau negativ astfel încât să avem $x^2 + 1 = 0$ sau $x^2 = -1$, deoarece pătratul unui număr real nu poate fi negativ. Prin convenție, $i = \sqrt{-1}$ sau $i^2 = -1$, i fiind definit de Euler ca unitate imaginară. Dacă avem de rezolvat o ecuație de forma $x^2 + 4 = 0$, atunci obținem folosind notația lui Euler, $x = 2i$, $x = -2i$, numere pur imaginare. Dacă avem de rezolvat ecuația $x^2 + x + 1 = 0$, obținem numerele de forma $x = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vom nota cu $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1} \text{ sau } i^2 = -1\}$, mulțimea numerelor complexe. Pentru $y = 0$, $\mathbb{C} = \{z = x \mid x \in \mathbb{R}\} \equiv \mathbb{R}$, adică $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Preliminarii

Forma $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$ se numește forma algebrică a numărului complex. Puterile lui i sunt: $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. În general $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$, adică $i^n = \{-1, 1, -i, i\} \forall n \in \mathbb{N}$.

Știm că între mulțimea numerelor complexe și mulțimea punctelor din plan, există o corespondență biunivocă: fiecărui număr complex îi corespunde în plan un punct și numai unul și fiecărui punct din plan îi corespunde un număr complex și numai unul. Punctul M se numește imaginea geometrică a numărului complex z iar numărul complex se numește afixul lui M .

Spre deosebire de mulțimea numerelor reale, mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ nu este o mulțime total ordonată față de relația " $m \leq n$ "; din acest motiv, nu se consideră inegalitate între numerele complexe. De exemplu, dacă am presupune că $i \in \mathbb{C}$ este pozitiv, $i > 0$, atunci $i^2 = i \cdot i = -1$, ceea ce înseamnă că $-1 > 0$, absurd, iar dacă $i < 0$, atunci $-i > 0$ și $(-i)(-i) = i^2 = -1$, nu poate fi pozitiv.

Fie M imaginea geometrică a numărului complex $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$; din corespondența biunivocă dintre numerele complexe și punctele planului, rezultă că fiecărui număr complex z îi corespunde un vector legat $\overrightarrow{OM}$, care are expresia analitică $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$, iar (a, b) devin coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$. Pentru fiecare număr complex se definesc noțiunile:

Definiție 1: Prin modulul unui număr complex $z = a + ib$, vom înțelege lungimea segmentului $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$.

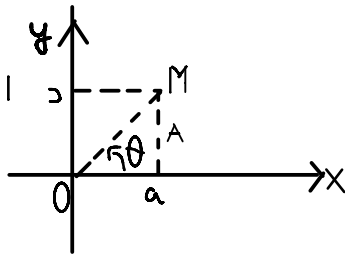
Din această definiție rezultă că modulul numărului complex este un număr real pozitiv.

Observație: Dacă $z = 0$, $|z| = 0$, și dacă $z = \infty$, atunci $|z| = \infty$, unde simbolul ∞ se referă la $+\infty$, infinitul real pozitiv.

Definiția 2: Unghiul format de sensul pozitiv al axei Ox cu poziția finală a razei vectoriale $\overrightarrow{OM}$ se numește argumentul numărului complex $z \neq 0$.

Dacă $\theta \in [0, 2\pi]$, atunci $\theta = \arg z$ și se numește argumentul principal al numărului complex.

Observație: Raza vectoriale determină o infinitate de unghiuri cu sensul pozitiv al axei Ox , notat cu $\arg z = \{\arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, care se numește mulțimea tuturor argumentelor numărului complex.



Determinarea modului și argumentului se face din $\triangle OAM$, cu $\hat{A} = 90^\circ$,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a}, \quad \theta \in \left\{ \arctg \frac{b}{a} + k\pi \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad z \neq 0.$$

Pentru cadranul I, $k=0$. Pentru cadranele II și III, $k = 1$. Iar pentru cadranul IV, $k = 2$.

Folosind noțiunile de modul și argument principal, avem forma trigonometrică a numărului complex: $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Observație: Folosind forma trigonometrică a numărului complex și proprietățile funcțiilor trigonometrice pentru $\sin$ și $\cos$, avem:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n| \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)].$$

Dacă $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$, obținem forma lui Moivre:

$$z^n = |z|^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Dacă $z = i$, $\arg i = \frac{\pi}{2}$ și $i^n = 1(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})^n = \cos n \frac{\pi}{2} + i \sin n \frac{\pi}{2}$.

Un alt mod de determinare a puterilor naturale ale lui i .

Reamintim că noțiunea de determinant de ordinul doi este o consecință a rezolvării unui sistem compactibil determinat de două ecuații și două necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\text{cu soluțiile } x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \text{ și } x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Reamintim principiul inducției matematice. Propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n , dacă sunt verificate următoarele condiții:

1. Propoziția $P(n)$ adevărată pentru $n=0$ sau $n=1$
2. Din presupunerea că $P(n)$ este adevărată pentru $n=k$, $k \in \mathbb{N}$, rezultă că este adevărată pentru $n=k+1$.

Produsul a n numere complexe sub formă de determinant:

Fie $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ sub formă algebrică.

$$\text{Calculăm } z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Ținând cont de definiția determinantului de ordinul doi, vom putea să scriem produsul cu ajutorul determinantului de ordin doi:

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} b_1 & -a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

Folosind expresia $z_1 z_2$ vom calcula:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 z_3 &= \left[\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} b_1 & -a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} \right] \cdot (a_3 + ib_3) = \\ &= a_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} b_1 & -a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} + i \left[a_3 \begin{vmatrix} b_1 & -a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Ținând cont de egalitățile:

$$a_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} b_1 & -a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 \\ -a_2 & b_2 & a_3 \end{vmatrix} \text{ și}$$

$$a_3 \begin{vmatrix} b_1 & -a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & -a_1 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 \\ -a_2 & b_2 & a_3 \end{vmatrix} \text{ obținem:}$$

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)(a_3 + ib_3) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 \\ -a_2 & b_2 & a_3 \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} b_1 & -a_1 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 \\ -a_2 & b_2 & a_3 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Analizând rezultatul (2) putem afirma că determinanții din (2) se obțin completând determinanții

$$\text{din (1) cu ultima linie și ultima coloană } \begin{vmatrix} \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & b_2 \\ -a_2 & b_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Dacă înmulțim relațiile (2) cu $a_4 + ib_4$, vom avea:

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)(a_3 + ib_3)(a_4 + ib_4) =$$

$$= a_4 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 \\ -a_2 & b_2 & a_3 \end{vmatrix} - b_4 \begin{vmatrix} b_1 & -a_1 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 \\ -a_2 & b_2 & a_3 \end{vmatrix} + i \left\{ a_4 \begin{vmatrix} b_1 & -a_1 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 \\ -a_2 & b_2 & a_3 \end{vmatrix} + b_4 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 \\ -a_2 & b_2 & a_3 \end{vmatrix} \right\}$$

Calculând partea reală din acest produs, scriem:

$$a_4 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 \\ -a_2 & b_2 & a_3 \end{vmatrix} - b_4 \begin{vmatrix} b_1 & -a_1 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 \\ -a_2 & b_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 & -a_3 \\ -a_2 & b_2 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 \end{vmatrix}$$

Deoarece dezvoltând determinantul după elementele liniei a patra, obținem rezultatul din membrul stâng.

În mod identic avem:

$$a_4 \begin{vmatrix} b_1 & -a_1 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 \\ -a_2 & b_2 & a_3 \end{vmatrix} + b_4 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 \\ -a_2 & b_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & -a_1 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 & -a_3 \\ -a_2 & b_2 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 \end{vmatrix}$$

Și vom obține::

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)(a_3 + ib_3)(a_4 + ib_4) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 & -a_3 \\ -a_2 & b_2 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} b_1 & -a_1 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 & -a_3 \\ -a_2 & b_2 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 \end{vmatrix}$$

Teoremă: Notăm cu $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \dots (a_n + ib_n) = A_n + iB_n$, unde A_n și B_n sunt determinanți de ordinul n ; atunci, produsul $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \dots (a_n + ib_n)(a_{n+1} + ib_{n+1}) = A_{n+1} + iB_{n+1}$, unde A_{n+1} și B_{n+1} sunt determinanți de ordinul $(n+1)$, care se deduc mărginind determinanții A_n și B_n cu

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & 0 & \\
 & & & & & \dots & \\
 & & & & & 0 & \\
 & & & & & -a_n & \\
 & & & & & b_n & \\
 & & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n+1} \\
 \text{dacă } n \text{ este impar, și cu:} & & & & & & a_{n+1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & 0 & \\
 & & & & & \dots & \\
 & & & & & 0 & \\
 & & & & & b_{n+1} & \\
 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n & b_n \\
 \text{dacă } n \text{ este par.} & & & & & & a_{n+1}
 \end{array}$$

Demonstrația se face în general cu metoda inducției complete, verificând cazurile $n=2$ și $n=3$.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Ionescu D.V. (1978), Complemente de Matematici pentru licee, Editura Did. și Ped. București
- [2] Oros G.I. (2024), Noțiuni introductive în studiul Analizei Complexe, Casa Cărții de Știință
- [3] Năstăsescu C., Niță I. Stănescu (1999), Matematica pentru clasa a XI-a, Elemente de algebră superioară, Ed. Did. și Ped. București

TEOREMA DE MEDIE

Ioana FIRTEAN

Colegiul Tehnic „Traian Vuia” Oradea, profesor de matematică, ioanaflorinna@gmail.com

Rezumat: Studiul funcțiilor a ocupat și ocupă un rol central în analiza matematică. Un rezultat important îl reprezintă formula de medie enunțată în Teorema 1. Prezenta lucrare cuprinde definirea noțiunii de valoare medie a funcției continue pe un interval, enunțul teoremei de medie, precum și soluțiile unor exerciții extrase din materialele de specialitate menționate în bibliografie.

Cuvinte cheie: valoarea medie, funcție continuă, teorema de medie, aria, interpretarea geometrică

Definiția 1:

Valoarea medie a funcției continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pe intervalul $[a, b]$ este numărul real

$$M(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Teorema 1 (Teorema de medie):

Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci există $\xi \in [a, b]$ astfel încât:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\xi).$$

Interpretare geometrică: Dacă f este o funcție continuă și pozitivă pe $[a, b]$, atunci există cel puțin un punct $\xi \in [a, b]$ astfel încât subgraficul lui f să aibă aceeași arie cu dreptunghiul de bază $(b-a)$ și înălțime $f(\xi)$. (Figura 1, zona hașurată)

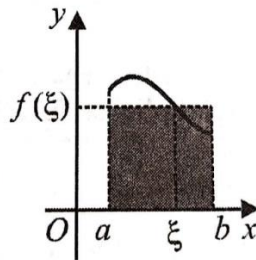


Figura 1. Interpretarea geometrică

O variantă a teoremei de medie este următoarea:

Teorema 2: Dacă $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt două funcții continue și, pentru orice $x \in [a, b]$, $g(x) \geq 0$, atunci există $\xi \in [a, b]$ astfel încât:

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

În exercițiile următoare vom calcula valoarea medie pentru funcțiile date și vom determina punctul ξ corespunzător valorilor respective:

1) $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x$

$$M(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{3-0} \int_0^3 (x^2 - 2x) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^3 = \frac{1}{3} \cdot (9 - 9) = 0$$

Ecuția $f(\xi) = 0$, adică $\xi^2 - 2\xi = 0$ are soluțiile $\xi_1 = 0, \xi_2 = 2$.

2) $f: [5, 10] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x-1}$

$$\text{Avem } \int_5^{10} \sqrt{x-1} dx = \int_5^{10} (x-1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_5^{10} = \frac{38}{3}$$

$$M(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{10-5} \cdot \frac{38}{3} = \frac{38}{15}$$

$$f(\xi) = \frac{38}{15} \Rightarrow \sqrt{\xi-1} = \frac{38}{15} \Rightarrow \xi = 1 + \frac{38^2}{225}$$

3) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 - x^2$

Se calculează $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (2 - x^2) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

$$M(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{1-0} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

Așadar $f(\xi) = \frac{5}{3}$ și $2 - \xi^2 = \frac{5}{3} \Rightarrow \xi^2 = \frac{1}{3}$ cu soluția $\xi = \frac{\sqrt{3}}{3} \in [0, 1]$.

4) $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$

Funcția $f(x) = \sin x$ este continuă pe intervalul $[0, \pi]$, deci conform teoremei de medie, există $\xi \in [0, \pi]$ astfel încât:

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = -\frac{\cos x}{\pi} \Big|_0^\pi = -\frac{\cos \pi}{\pi} + \frac{\cos 0}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$\sin \xi = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \xi = \arcsin \frac{2}{\pi}$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] Burtea M. (2009). *Culegere de exerciții și probleme de Matematică pentru clasa a XII-a*, Editura Champion, București
- [2] Ganga M. (2007). *Manual de matematică pentru clasa a XII-a – Elemente de analiză matematică*, Editura Mathpress, Ploiești

ELEMENTE DE TEORIA JOCURILOR

Ana-Maria GAVRILĂ

Școala Gimnazială Nr. 99, București, profesor de matematică, gvr.anamaria@gmail.com

Rezumat: În decursul timpului jocurile au generat studii matematice aprofundate, care au condus la dezvoltarea și la fundamentarea unor ramuri deosebit de importante pentru activitatea practică din diverse domenii. Cu toate că situații de conflict au existat încă din antichitate, nimeni nu le-a acordat atenție, considerând că studierea lor cu ajutorul calculului matematic ar însemna "să tragi cu tunul într-o muscă". Datorită profunzimii anumitor probleme de persipacitate și de inteligență, o serie de matematicieni celebri și-au testat abilitățile în rezolvarea unor asemenea probleme. Primele situații conflictuale având ca obiect jocurile de noroc au fost analizate cu ajutorul matematicii abia în secolul al XVII-lea și au fost făcute de matematicieni celebri ca Blaise Pascal, Pierre de Fermat, Galileo Galilei și Nicolas Bernoulli. Ele nu au condus însă la fundamentarea teoriei jocurilor, ci a calculului probabilităților. Creșterea volumului de schimbări comerciale a făcut ca două secole mai târziu să fie considerate drept situații conflictuale și acelea care apar în domeniul economic. Dar nici lucrarea lui Antoine Augustin Cournot, tipărită în 1838, și nici lucrările lui Wilfredo Pareto și L. Walrad, exponenți de seamă ai unor studii matematice în domeniul economic, nu au fundamentat teoria jocurilor, ci o altă știință, denumită econometria. De abia în 1944, un matematician, John von Neumann, și un economist, Oskar Morgenstern, au ajuns la concluzia că o bună parte din conflictele întâlnite în domeniul economic se aseamănă cu cele care apar în jocurile de noroc. În momentul în care au făcut această observație, ei au pus bazele matematice ale teoriei jocurilor, elaborând celebra lucrare intitulată "Teoria jocurilor și comportarea economică".

Cuvinte cheie: teoria jocului

Jocuri matriceale

Definiția 1.2.1. Un joc cu doi jucători cu sumă nulă se numește *joc matriceal*.

Această categorie de jocuri are calitatea de a exprima foarte clar noțiunea de soluție a jocului care interesează de fapt în contextul luării deciziei optime.

Definiția 1.2.2. Pentru a reprezenta un joc matriceal se întocmește o matrice numită *matricea câștigurilor* sau *de plăți* a jocului.

Fie $f_1: A \times B \rightarrow R$, $f_2: A \times B \rightarrow R$. Notăm cu $f_1(a_i, b_j)$ funcția de câștig a jucătorului A în cazul când acesta folosește modul de acțiune a_i , iar jucătorul B folosește modul de acțiune b_j , $f_2(a_i, b_j, \dots)$ fiind funcția de câștig a jucătorului B în aceeași situație.

Fiind un joc cu sumă nulă înseamnă că are loc relația $f_1(a_i, b_j, \dots) + f_2(a_i, b_j, \dots) = 0$, adică câștigul jucătorului A este pierdere pentru jucătorul B . [1]

Presupunem că jucătorul A are m moduri de acțiune, deci $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, iar jucătorul B are n moduri de acțiune, deci $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Notăm cu c_{ij} câștigul jucătorului A când acesta folosește modul de acțiune a_i , iar jucătorul B are modul de acțiune b_j , atunci $f_1(a_i, b_j, \dots) = c_{ij}$.

Putem întocmi matricea de plăți a unui joc într-un tabel dat în forma de mai jos: [2]

Un joc matriceal se poate scrie în forma $\Gamma = (A, B, C)$, unde prin C a fost notată matricea de plăți $\Gamma = (A, B, f)$, f fiind funcția de câștig.

Tabelul nr.1.1 Matricea de plăți

A \ B	b_1	$b_2 \dots$	b_j	$\dots$	b_n
a_1	c_{11}	$c_{12} \dots$	c_{1j}	$\dots$	c_{1n}
a_2	c_{21}	$c_{22} \dots$	c_{2j}	$\dots$	c_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_i	c_{i1}	$c_{i2} \dots$	c_{ij}	$\dots$	c_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m	c_{m1}	$c_{m2} \dots$	c_{mj}	$\dots$	c_{mn}

Jucător maximizat. Jucător minimizat.

În continuare, la analiza unui joc vom considera că jucătorul A va urmări întotdeauna obținerea unui câștig cât mai mare și-l vom numi jucător maximizat, iar jucătorul B va urmări obținerea unei pierderi minime, numindu-l jucător minimizat.

Notăm cu α_i , $1 \leq i \leq m$, câștigul minim al jucătorului A când alege modul de acțiune a_i și cu β_j , $1 \leq j \leq n$, pierderea maximă a jucătorului B când alege modul de acțiune b_j . Notăm cu I și J mulțimea indicilor modurilor de acțiune, adică $I = \{1, 2, \dots, m\}$ și $J =$

$\{1, 2, \dots, n\}$. Putem scrie deci : $\alpha_i = \min_{j \in J} c_{ij}$, $i \in I$. Cum jucătorul A caută maximizarea $j \in J$ câștigului sau, va alege maximul dintre valorile α_i . Aceasta valoare o vom nota v_1 și o numim valoare inferioară a jocului (valoare maxmin), fiind câștigul minim sigur al jucătorului A . Are loc relația :

$$v_1 = \max \alpha_i = \max_{i \in I} \min_{j \in J} c_{ij} \quad (1.3.1.)$$

Pentru jucătorul B am notat cu β_j , $1 \leq j \leq n$, pierderea sa maximă care este egală cu :

$\beta_j = \max_{i \in I} c_{ij}$, $j \in J$. Jucătorul B dorește minimizarea pierderii sale și va alege minimul $i \in I$

dintre valorile β_j . Această valoare o notăm cu v_2 și o numim valoarea superioară a jocului (valoarea minmax), fiind pierderea maximă sigură a jucătorului B , aceasta fiind :

$$v_2 = \min \beta_j = \min_{j \in J} \max_{i \in I} c_{ij} \quad (1.3.2.)$$

Altfel scrise, valorile v_1 și respectiv v_2 sunt egale cu:

$$v_1 = \max_{i \in I} \min_{j \in J} f_1(a_i, b_j) ; a_i \in A, b_j \in B$$

$$v_2 = \min_{j \in J} \max_{i \in I} f_1(a_i, b_j) . \text{ Vom reprezenta aceste valori în matricea de plăți: [2]}$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] Barron E.N. (2006), *Game Theory* Loyola University Chicago, Illinois
- [2] Masgras V. (2003), *Cercetări operaționale*, Editura Fair Partners, București
- [3] Mureșan, A.S. (1997), *Cercetări operaționale*, vol. 1 și 2, Cluj-Napoca,
- [4] Petyon Y., Shmuel Z. (2015), *Handbook of Game Theory*, Vol. 4 - North Holland Cap.15, Aviezri S. Fraenkel, Robert A. Hearn, Aaron N. Siegel

CONCURENȚĂ ȘI COLINIARITATE

Livia-Marina HARABAGIU

Colegiul Național "Spiru Haret" București, sector 2, profesor dr. de matematică, harabagiu_livia@yahoo.com

Rezumat: *Lucrarea de față dorește să fie un material care să prezinte diverse modalități de rezolvare a problemelor de geometrie în care intervin noțiunile de coliniaritate și concurență. În prima parte, vom descrie metode de demonstrare a coliniarității unor puncte și vom demonstra teorema lui Menelaus folosind metode alternative (prin asemănarea triunghiurilor, prin geometrie vectorială, folosind omotetia). În a doua parte, vom demonstra teorema lui Ceva, vom deduce concurența bisectoarelor unui triunghi și vom utiliza teorema lui Ceva în aplicații.*

Cuvinte cheie: concurență, coliniaritate

Motto: "Geometria este cea mai bună și mai simplă dintre toate logicile, cea mai potrivită să dea inflexibilitate judecății și rațiunii." -**Denis Diderot**

Definiție 1

Trei sau mai multe puncte distincte se numesc **puncte coliniare** dacă aparțin aceleiași drepte.

Definiție 2

Două drepte care au un singur punct comun se numesc **depte concurente** sau **secante**.

Pentru a verifica coliniaritatea a trei puncte există diverse metode de demonstrare:

1) folosind **lungimea segmentelor**

Dacă se dau trei puncte distincte astfel încât suma lungimilor a două dintre segmentele determinate este egală cu lungimea celui de-al treilea segment determinat, atunci cele trei puncte sunt coliniare.

Aplicația 1

Se consideră punctele A,B,C astfel încât $AB=4,5$ cm, $BC=2,3$ cm și $AC=6,8$ cm. Arată că punctele A,B,C sunt coliniare. Justifică răspunsul dat.

Soluție

Observăm că $4,5 \text{ cm} + 2,3 \text{ cm} = 6,8 \text{ cm}$. Avem că $AB+BC=AC$. Deducem că punctele A,B,C sunt puncte coliniare.

Definiție 3

Unghiul ABC este **alungit** dacă laturile lui sunt semidrepte opuse. Măsura unui unghi alungit este egală cu 180° .

2) folosind **metoda unghiului alungit**

Pentru a arăta că punctele distincte A,B,C sunt coliniare, în această ordine, este necesar și suficient să arătăm că unghiul ABC este unghi alungit.

Aplicația 2

Fie unghiurile adiacente suplimentare AOB și BOC astfel încât raportul măsurilor lor să fie egal cu $\frac{1}{4}$. Fie OD semidreapta opusă bisectoarei unghiului BOC. În interiorul unghiului COD se consideră punctele M și N astfel încât $\angle CON = \angle DOM = 2 \cdot \angle MON$, iar semidreapta ON este situată în interiorul unghiului COM. Demonstrați că punctele B,O, M sunt coliniare.

Etapa locală, Vâlcea 2010- enunț parțial

Soluție

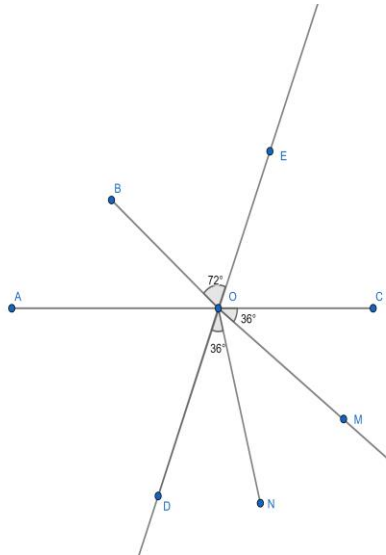


Fig. 1

Notăm măsura unghiului AOB cu x . Atunci măsura unghiului BOC va fi egală cu $4x$.

Avem relațiile: $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ \Rightarrow x + 4x = 180^\circ \Rightarrow 5x = 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$.

Prin urmare, măsura unghiului AOB este de 36° , iar măsura unghiului BOC este de 144° . Fie semidreapta OE bisectoarea unghiului BOC. Deducem că $\angle BOE \equiv \angle COE = 72^\circ$. Unghiurile AOE și COD sunt unghiuri opuse la vârf, rezultă că $\angle AOE \equiv \angle COD = 108^\circ$.

Notăm măsura unghiului MON cu y . Deducem că $\angle DON = \angle MON = \angle COM = y$, dar $\angle COD = \angle DON + \angle MON + \angle COM = 108^\circ \Rightarrow 3y = 108^\circ \Rightarrow y = 36^\circ$. Avem că $\angle BOM = \angle AOB + \angle AOD + \angle DON + \angle MON = 36^\circ + 72^\circ + 36^\circ + 36^\circ = 180^\circ$. În concluzie, punctele B, O și M sunt puncte coliniare.

3) folosind **axioma paralelelor** (postulatul lui Euclid)

Axioma paralelelor

Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte trece o singură paralelă la dreapta dată.

Aplicația 3

În triunghiul ABC, considerăm punctele D și E mijloacele laturilor AC și AB. Se notează cu M și N simetricul lui B față de D și, respectiv, al lui C față de E. Arătați că punctele M, A, N sunt coliniare.

Soluție

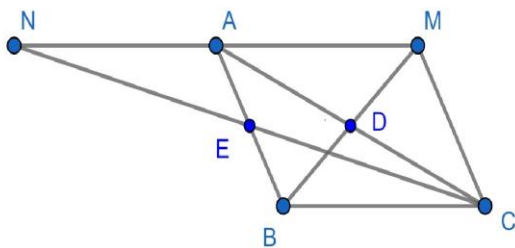


Fig. 2

Punctul D este mijlocul segmentelor MB și AC $\Rightarrow$ patrulaterul ABCM este paralelogram

$\Rightarrow AM \parallel BC$, iar punctul E este mijlocul segmentelor AB și CN $\Rightarrow$ patrulaterul ACBN este paralelogram $\Rightarrow AN \parallel BC$.

Obținem că $AM \parallel BC$ și $AN \parallel BC$, iar prin punctul A, conform axiomei paralelelor, se poate duce o singură paralelă la dreapta BC. Rezultă că punctele M, A, N sunt coliniare.

4) folosind **vectori coliniari**

Definiție 5

Doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ din plan sunt **coliniari** dacă și numai dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}$.

Astfel, punctele A, B, C sunt coliniare dacă și numai dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari, deci dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC}$.

Aplicația 4

Se consideră un paralelogram ABCD și punctele $M \in (AB), N \in (CM)$ astfel încât $AM = 2MB$ și $CN = 3NM$. Să se demonstreze că punctele B, N, D sunt coliniare.

Soluție

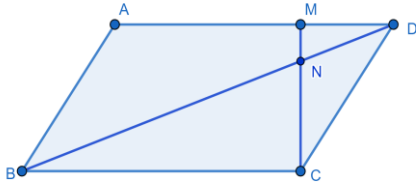


Fig. 3

Avem $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BC} + \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BC} + \frac{3}{4} \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM}) = \frac{1}{4} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{BD}$. Prin urmare, vectorii $\overrightarrow{BN}$ și $\overrightarrow{BD}$ sunt coliniari. Obținem că punctele B, N, D sunt puncte coliniare.

5) folosind **numere complexe**

Definiție 6

Punctele $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ sunt **colineare** dacă și numai dacă $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$.

Definiție 7

Afixul punctului M care împarte segmentul AB în raportul k ($\frac{AM}{MB} = k$) este $z_M = \frac{z_1 + kz_2}{1+k}$. În particular, dacă M este mijlocul segmentului AB atunci afixul său este $z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

Aplicația 5

Se consideră triunghiul ABC. Pe latura BC se ia punctul D astfel încât $BC = 3CD$. Să se arate că punctele A și D sunt coliniare cu mijlocul medianei CE.

Soluție

Considerăm triunghiul ABC în care vârfurile sale au următoarele afixe $A(z)$, $B(0)$, $C(3a)$, unde $a \in \mathbb{R}^*$. Din relația $BC = 3CD$ deducem că afixul punctului D este $2a$, iar din faptul că E este mijlocul segmentului AB obținem că afixul punctului E este $\frac{z}{2}$.

Notăm cu M mijlocul medianei CE. Rezultă că afixul punctului M este $\frac{6a+z}{4}$.

Avem $\frac{z_D - z_A}{z_M - z_A} = \frac{2a - z}{\frac{6a+z}{4} - z} = \frac{4(2a-z)}{6a-z} = \frac{4}{3} \in \mathbb{R}$. În concluzie, punctele A, D și M sunt puncte

coliniare.

6) folosind **teorema lui Menelaus**

Pentru început vom demonstra teorema lui Menelaus, apoi o vom aplica în probleme.

Definiție 8

Orice dreaptă d care intersectează dreptele AB, BC, AC care conțin laturile $[AB]$, $[BC]$, respectiv $[AC]$ ale unui triunghi ABC se numește **transversală** a triunghiului ABC.

Teorema (Menelaus)

Fie ABC un triunghi și A_1, B_1, C_1 trei puncte astfel încât $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$. Dacă punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare atunci are loc egalitatea :

$$\frac{[A_1B]}{[A_1C]} \times \frac{[B_1C]}{[B_1A]} \times \frac{[C_1A]}{[C_1B]} = 1.$$

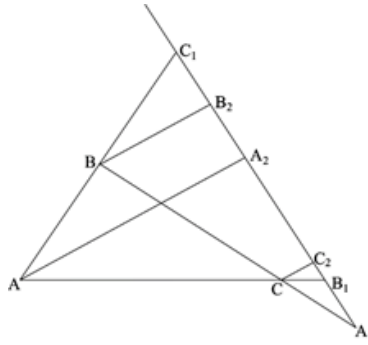


Fig. 4

Demonstrație 1 (folosind asemănarea, conform [3])

Notăm cu t transversala $A_1B_1C_1$. Fie $A' = pr_t A$, $B' = pr_t B$, $C' = pr_t C$. Rezultă că $AA' \perp t$, $BB' \perp t$, $CC' \perp t$. Deducem că $AA' \parallel BB' \parallel CC'$.

Deoarece $BB' \parallel CC'$, folosind teorema fundamentală a asemănării obținem că

$$\square A_1CC' \square\square A_1BB' \Rightarrow \frac{A_1C}{A_1B} = \frac{CC'}{BB'}, \text{ de unde } \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{BB'}{CC'}. \quad (1)$$

Deoarece $AA' \parallel BB'$, folosind teorema fundamentală a asemănării obținem că

$$\square AA'C_1 \square\square BB'C_1 \Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AA'}{BB'}. \quad (2)$$

Pentru că $AA' \parallel CC'$, folosind teorema fundamentală a asemănării obținem că

$$\square AA'B_1 \square\square CC'B_1 \Rightarrow \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{CC'}{AA'}. \quad (3)$$

Înmulțind relațiile (1), (2) și (3) obținem relația dorită.

Demonstrație 2 (folosind geometria vectorială, conform [5])

Punctele A_1 , B_1 , C_1 împart segmentele BC , AC și AB în rapoartele a , b , c . Avem următoarele relații: $\overrightarrow{AC_1} = c \cdot \overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{B_1C} = b \cdot \overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{A_1B} = a \cdot \overrightarrow{A_1C}$. (4)

$$\text{Obținem relațiile } \overrightarrow{A_1C_1} = \frac{\overrightarrow{A_1A} + c \cdot \overrightarrow{A_1B}}{1+c} \text{ și } \overrightarrow{A_1B_1} = \frac{\overrightarrow{A_1C} + b \cdot \overrightarrow{A_1A}}{1+b}. \quad (5)$$

Deoarece vectorii $\overrightarrow{A_1C_1}$ și $\overrightarrow{A_1B_1}$ sunt coliniari rezultă că există $k \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{A_1C_1} = k \cdot \overrightarrow{A_1B_1}$. (6). Înlocuind relațiile (4) și (5) în relația (6) se obține că

$$\frac{\overrightarrow{A_1A} + c \cdot \overrightarrow{A_1B}}{1+c} = k \cdot \frac{\overrightarrow{A_1C} + b \cdot \overrightarrow{A_1A}}{1+b} \text{ și ținând cont că } \overrightarrow{A_1C} = \frac{1}{a} \cdot \overrightarrow{A_1B} \text{ rezultă că}$$

$$(1+b-kb-kbc) \cdot \overrightarrow{A_1A} + \left(c+bc-\frac{k}{a}-\frac{kc}{a} \right) \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0.$$

Dar vectorii $\overrightarrow{A_1A}$ și $\overrightarrow{A_1B}$ sunt vectori necoliniari și se obțin rezultatele $1+b=k(b+bc)$, respectiv $c(1+b)=\frac{k(1+c)}{a}$. (7) Eliminând k din cele două egalități obținem că $abc=1$ și în consecință teorema este demonstrată

Demonstrație 3 (folosind omotetia, conform [4])

Reamintim definiția omotetiei:

Definiție 9

Fie $O \in P$ un punct fixat și $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. **Omotetia de centru O și raport k** este o transformare a planului P prin care fiecărui punct X i se asociază punctului X' astfel încât $\overrightarrow{OX'} = k \cdot \overrightarrow{OX}$.

Demonstrația teoremei Menlaus

Fie t o transversală care intersectează dreptele AB, BC, CA care conțin laturile triunghiului ABC în punctele C_1 , A_1 , B_1 . Construim semidreptele paralele $[AA_2]$, $[BB_2]$, $[CC_2]$ care intersectează transversala t în punctele A_2 , respectiv B_2 , C_2 . Rezultă că $[AA_2]$, $[BB_2]$ și $[CC_2]$ sunt segmente paralele. Considerăm trei omotetii: $h_{A_1}^{k_1}$ care transformă pe B în C_1 , $h_{B_1}^{k_2}$ care transformă pe C_1 în A și $h_{C_1}^{k_3}$ care transformă pe A în B.

$$\text{Prin urmare, } \frac{[A_1B]}{[A_1C]} = k_1, \frac{[B_1C]}{[B_1A]} = k_2 \text{ și } \frac{[C_1A]}{[C_1B]} = k_3.$$

$$\text{Rezultă că } h_{A_1}^{k_1}(B_2) = C_2, \quad h_{B_1}^{k_2}(C_2) = A_2, \quad h_{C_1}^{k_3}(A_2) = B_2 \text{ și}$$

$$\frac{[A_1B]}{[A_1C]} = \frac{[BB_2]}{[CC_2]}, \quad \frac{[B_1C]}{[B_1A]} = \frac{[CC_2]}{[AA_2]}, \quad \frac{[C_1A]}{[C_1B]} = \frac{[AA_2]}{[BB_2]}.$$

Înmulțind membru cu membru aceste ultime trei egalități obținem relația din enunț. Există și este adevărată și reciproca teoremei Menlaus, pe care o reamintim mai jos:

Teorema reciprocă teoremei lui Menlaus

Fie ABC un triunghi și A_1, B_1, C_1 trei puncte astfel încât $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$. Dacă $\overrightarrow{AC_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{BA_1} = \beta \cdot \overrightarrow{A_1C}$ și $\overrightarrow{CB_1} = \gamma \cdot \overrightarrow{B_1A}$ și $\alpha\beta\gamma = -1$ atunci punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare.

Aplicația 6

Dreapta Newton-Gauss

Laturile AB și CD ale unui patrulater convex ABCD se intersectează în F, iar laturile AD și BC se intersectează în E. Să se arate că mijloacele segmentelor AC, BD, respectiv EF sunt coliniare.

Soluție

Notăm cu K, L, M mijloacele diagonalelor AC, BD, EF și cu G, H, I mijloacele segmentelor BC, CE, EB. Observăm că avem $K \in GH$, $L \in GI$, $M \in HI$. Aplicăm teorema lui Menlaus în triunghiul BEC pentru transversala A-D-F. Ținând cont de liniile mijlocii formate obținem că $\frac{KG}{KH} \cdot \frac{LI}{LG} \cdot \frac{MH}{MI} = \frac{AB}{AE} \cdot \frac{DE}{DC} \cdot \frac{FC}{FB} = 1$. Din reciproca teoremei lui Menlaus rezultă că punctele K, L și M sunt coliniare.

7) folosind **transformări geometrice** (omotetia, inversiunea)

Am definit și aplicat omotetia în demonstrația 3 a teoremei Menelaus.

Pentru a verifica concurența dreptelor vom aplica **teorema lui Ceva**:

Fie ABC un triunghi și A_1, B_1, C_1 trei puncte astfel încât $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$ cu $\overrightarrow{AC_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{BA_1} = \beta \cdot \overrightarrow{A_1C}$ și $\overrightarrow{CB_1} = \gamma \cdot \overrightarrow{B_1A}$. Atunci dreptele AA_1 , BB_1 și CC_1 sunt concurente dacă și numai dacă $\alpha\beta\gamma = -1$.

Demonstrația teoremei lui Ceva

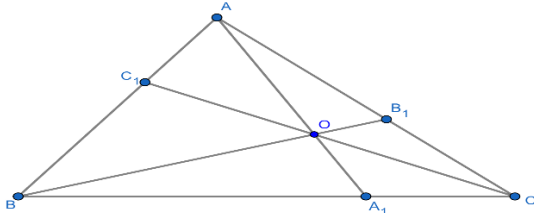


Fig. 5

Notăm $BB_1 \cap CC_1 = \{O\}$ și $AA_1 \cap CC_1 = \{S\}$. Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul ABA_1 pentru transversala $C-O-C_1$. Obținem relația $\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{CB}{CA_1} \cdot \frac{OA_1}{OA} = 1 \Rightarrow \frac{OA_1}{OA} = \frac{1}{\alpha(1-\beta)}$ (1)

Din teorema lui Menelaus aplicată în triunghiul ACA_1 pentru transversal $B-S-B_1$ obținem $\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{BC} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{SA}{SA_1} = 1 \Rightarrow \frac{SA_1}{SA} = \frac{\beta\gamma}{(\beta-1)}$ (2)

Dreptele AA_1 , BB_1 și CC_1 sunt concurente dacă și numai dacă $O=S$.

Din relațiile (1) și (2) obținem că $\frac{1}{\alpha(1-\beta)} = \frac{\beta\gamma}{(\beta-1)}$ sau $(\beta-1)(1+\alpha\beta\gamma) = 0$.

Dacă $\beta = 1$ atunci $\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{A_1C}$ sau $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$ ceea ce nu se poate.

Dacă $\beta \neq 1$ atunci $\alpha\beta\gamma = -1$ și teorema este demonstrată.

Aplicația 7

Într-un triunghi, bisectoarele interioare ale triunghiului sunt concurente.

Soluție

Fie triunghiul ABC și bisectoarele interioare AA' , BB' și CC' . Notăm lungimile laturilor triunghiului cu $BC=a$, $AC=b$ și $AB=c$. Din teorema bisectoarei aplicată în triunghiul ABC pentru bisectoarele AA' , BB' și CC' obținem relațiile $\frac{BA'}{CA'} = \frac{BA}{CA} = \frac{c}{b}$, $\frac{CB'}{AB'} = \frac{CB}{AB} = \frac{a}{c}$, $\frac{AC'}{BC'} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$. (1)

Înmulțind relațiile (1) obținem că $\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = 1$ și conform teoremei Ceva rezultă că bisectoarele AA' , BB' și CC' sunt concurente.

Aplicația 8

Fie punctul M mijlocul laturii BC a unui triunghi ABC , semidreapta CD bisectoarea unghiului ACB , $D \in AB$ și $DE \parallel BC$, $E \in AC$. Demonstrați că dreptele AM , CD și BE sunt concurente.

Soluție

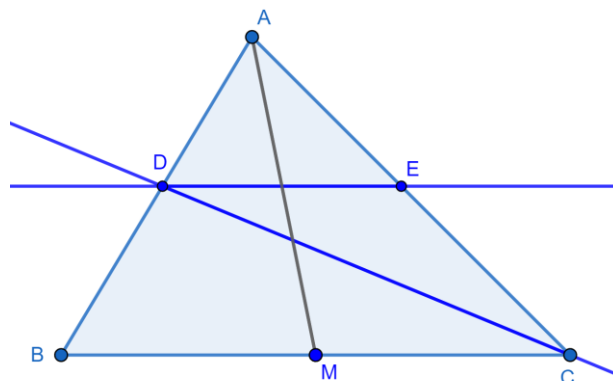


Fig. 6

Fie triunghiul ABC. Notăm lungimile laturilor triunghiului cu $BC=a$, $AC=b$ și $AB=c$.
Aplicând teorema bisectoarei pentru bisectoarea CD obținem că

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AD = \frac{bc}{a+b}, BD = \frac{ac}{a+b} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{b}{a}. (1)$$

Din teorema fundamentală a asemănării aplicată pentru $DE \parallel BC$ rezultă că $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ și obținem că $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AE = \frac{b^2}{a+b}, CE = \frac{ab}{a+b} \Rightarrow \frac{CE}{AE} = \frac{a}{b}. (2)$

Deoarece M este mijocul laturii BC avem că $\frac{BM}{CM} = 1. (3)$

Înmulțind relațiile (1), (2) și (3) obținem că $\frac{BM}{CM} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AD}{BD} = 1$ și conform teoremei Ceva rezultă că dreptele AM, CD și BE sunt concurente.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Duican L. , Duican I . (1987), *Transformări geometrice*, Editura Științifică și Enciclopedică , București
- [2] Ganga M . (2002). *Geometrie , Probabilități și Statistică* (manual pentru clasa a X-a), Editura Mathpress, Ploiești
- [3] Nicolescu L., Boskoff V . (1990), *Probleme practice de geometrie* , Editura Tehnică, București
- [4] Smaranda D., Soare N. (1988), *Transformări geometrice*, Editura Academiei, București,
- [5] Burtea M., Burtea G. (2004), *Matematică – trunchi comun și curriculum diferențiat*”(manual pentru clasa a IX-a), Editura Carminis, Pitești
- [6] Burtea M., Burtea G. (2005). *Matematică – trunchi comun și curriculum diferențiat*”(manual pentru clasa a X-a), Editura Carminis, Pitești
- [7] Bălăucă A. (2011), *Olimpiade, concursuri și centre de excelență-clasa a VII-a*, Editura Taida, Iași

ASPECTE ALE PROCESULUI COMUNICĂRII ÎN ACTUL MENTORATULUI INFORMAL AL PROFESORULUI DE MATEMATICĂ DIN JUDEȚUL BIHOR

Monica Florina HENES

Școala gimnazială "Ovidiu Drimba" Lugașu de Jos, Bihor, profesor de matematică, henesmoni@yahoo.com

"Comunicarea lucrează în folosul celor care lucrează la ea" - John Powell

Rezumat: Deși apare în cadrul legislativ al României (legea învățământului preuniversitar nr.198/4.07.2023) mentoratul formal al profesorilor debutanți încă nu există la noi în țară. Presupunem, totuși, că există o latură informală al acestui proces, care a luat naștere spontan, între două persoane care activează în același domeniu sau în specialități apropiate, ca o relație de susținere, de sprijin a învățării, de împărtășire în mod intenționat a cunoștințelor și al experienței proprii. Supoziția noastră ar fi că acest tip de mentoring este un act de altruism, de voluntariat, de consiliere, de îndrumare și susținere al tinerei generații, viitoare cadre didactice.

Deoarece instrumentul de bază al acestui acțiuni este comunicarea (eficientă), bănuim că se ivește o "avalanșă" de întrebări legată de acest mod de interacțiune psihosocială dintre oameni. Ca de exemplu: Cu cine /când / ce /cum /unde /de ce comunicăm?; Ce abilități de comunicare avem?; Ce obstacole /dificultăți apar în comunicare? Cum le depășim?; Ce finalitate va avea comunicarea?

Cuvinte cheie: mentor, debutant, comunicare.

INTRODUCERE

În unitatea școlară în care activez, deja de 7 ani (consecutivi) sunt responsabilul Comisiei de mentorat didactic și formare în carieră (CMDFCD). Astfel am primit sarcina de a mă ocupa cu debutanții din instituția noastră (indiferent dacă sunt sau nu de aceeași specialitate cu mine, indiferent de secție, indiferent de vechime în muncă, de vârstă), să realizez diagnoza lor de formare continuă, să planific, organizez și să desfășor cu ei activități din domeniul formării în cariera didactică, activități specifice de mentorat didactic în vederea susținerii examenului național pentru definitivare în învățământul preuniversitar, să elaborez rapoarte și planuri anuale privind dezvoltarea profesională continuă și evoluția în cariera didactică a personalului didactic încadrat în unitatea mea de învățământ, să organizez activități pentru dezvoltare profesională continuă – acțiuni specifice unității de învățământ, lecții demonstrative, schimburi de experiență etc și orice alte atribuții decurgând din legislația în vigoare și din regulamentul de organizare și funcționare a unității noastre școlare. De aici a apărut curiozitatea mea față de acest proces complex precum și necesitatea învățării etapelor în care se derulează acesta (pregătirea, negocierea, creșterea și finalitatea), progresând încet din fază în fază, bazându-ne pe etapele anterioare.

Debutantul este persoana care se află la debutul activității sale profesionale, un angajat nou, un tânăr căruia visul de a deveni cadru didactic a devenit realitate. Discipolului i se recomandă să studieze care sunt standardele de competență profesională ale cadrelor didactice, să se familiarizeze cu documentele necesare desfășurării activității lor și să își însușească anumite atitudini și aptitudini pentru a deveni un profesor cât mai bun posibil.

Un cadru didactic trebuie să se îmbunătățească continuu, atât pe plan profesional cât și pedagogic, pentru a se autodepăși, precum și pentru a nu pierde niciodată preocuparea de a deveni un factor esențial în dezvoltarea elevilor. În acest sens devine axiomatică existența unui mentor care va fi o călăuză prin labirintul profesiei, care transmite idei, experiențe, sugestii într-un subtil proces de inițiere spre o posibilă desăvârșire profesională. Mentorul reprezintă un dascăl adevărat care formează generații de discipoli care să își amintească peste ani, cu drag de cel care i-a format și le-a deschis drumul către reușita în viața profesională și în toate celelalte aspect ale vieții.

Dintre aptitudinile unui mentor amintim:

- cadru didactic cu un nivel înalt de maturitate profesională și expertiză didactică;
- capacitatea de a programa, de a analiza și de a evalua;
- disponibilitate de a împărtăși ceea ce știe, înclinare spre voluntariat, altruism;

- capacități empatice, de îndrumare și grijă pentru cei pe care îi formează;
- respect pentru abilitățile celorlalți;
- dorință de a-și oferi sprijinul ori de câte ori este nevoie;
- demonstrare de încredere ;
- deschidere, flexibilitate, creativitate, răbdare ;
- încredere în sine și abilitate de a provoca acest sentiment și celor pe care îi formează;
- atitudine pozitivă în orice împrejurare pentru depășirea problemelor și a dificultăților ;
- comportament etic în raporturile cu cei pe care îi învață;
- interes față de creșterea/îmbunătățirea calității educației;
- interes față de procesul formării viitorilor profesori;
- competențe de comunicare.

Dialogul între mentor și debutant, fie el polemic, tensionat sau calm și conciliant, înseamnă a așeza în armonie cunoașterea și experiența, impetuoșitatea începutului și tentația totalității, cu selecția lucidă, cu adecvarea la context, cu adaptarea la obiectivele demersului educațional. Este un dialog necesar, care va fi dublat de studiu, de recomandări, de asistențe la ore, de constituirea unor portofolii prin care ceea ce pare nestructurat, excesiv, abstract devine clar și structurat, adevărată paradigmă pentru o învățare activă, relevantă, contextualizată.

Mentoratul informal cel mai des întâlnit este cel de la nivelul unei unități școlare sau cel de la nivelul unei catedre sau arii curriculare. Ca urmare, comunicarea dintre mentor și discipol ar trebui să fie laterală, adică mesajul să fie trimis de la egal la egal, pentru că de fapt cei doi aparțin aceluiași nivel ierarhic, chiar dacă unul din ei este mai experimentat în domeniu. Metodele, mijloacele, problemele, fenomenele sunt împărtășite mai facil. Mentoringul are ca și scop integrarea nou-veniților, valorificarea potențialului lor precum și menținerea satisfacției lor la locul de muncă. Astfel se diminuează și procesul de părăsire timpurie al sistemului educațional de către debutanți. Informațiile și ideile sunt transmise în mod natural, mentorul informal neavând autoritate asupra discipolului. Stagiarul e doar ghidat, are libertate de acțiune. Nu există, încă în acest stadiu, nici fenomenul de competitivitate între membrii mentoratului care lucrează în echipă. Pe măsură ce relația lor se dezvoltă, profesorul începător devine tot mai încrezător în forțele proprii și independent.

Procesul de comunicare poate fi influențat de diferite dificultăți, obstacole sau blocaje. Pentru a le diminua și înlătura trebuie să le recunoaștem. Metodele de depășire al barierelor întâlnite, vom încerca să le deducem aplicând subiecților un chestionar online cu zece întrebări.

MATERIALE, MIJLOACE ȘI METODE

Se va aplica un chestionar online (de tip Google Forms) https://docs.google.com/forms/d/1WKUzaiQxZcMWfYP0gZut9wUm8gJwXW7VocyAWAtzRN8/viewform?edit_requested=true, ce conține zece itemi cu alegere multiplă. Întrebările sunt obligatorii, nu se pot sări și am selectat varianta cu un singur răspuns. Testul durează aproximativ 3 minute și conține întrebări formulate simplu și clar, ce vizează experiența personală al fiecărui discipol/debutant, răspunsul fiind unul subiectiv.

Eșantionul de cercetare este un lot de 48 de subiecți, care face parte din comunitatea profesorilor care predau matematică în județul Bihor. Intervistații au fost aleși aleatoriu, în funcție de disponibilitatea lor de a răspunde la întrebări, indiferent de sex, de vârstă (pot fi debutanți și persoane mai înaintate în vârstă, de exemplu cei care se reprofilează), de vechimea la catedră (cu toții au fost cândva începători), de mediul social din care provin sau în care activează, de nivelul școlar (preșcolar, primar, gimnazial sau liceal).

Comunitatea profesorilor de matematică din județul Bihor este formată din aproximativ 350 de membrii (activi). Aceștia sunt cadre didactice având studii superioare de licență (de lungă sau scurtă durată) și/sau masterat (eventual doctorat) de profil științe exacte/ matematică / matematică și științe ale naturii, cu specializări, fie simple, în matematică, fie duble, matematică-fizică,

matematică-informatică. Ei pot avea statutul didactic de angajat pe perioadă nedeterminată (titular în învățământ) sau pe perioadă determinată (suplinitor calificat , rar necalificat), precum și personal detașat, transferat sau titular doar pe viabilitatea postului. Intervievații pot avea în catedra lor mai multe materii de studiu, chiar și consiliere și orientare (foarte mulți dintre ei fiind și diriginți), pot activa și în regimul plata cu ora sau ca personal didactic titular care îndeplinește condițiile legale de pensionare dar care cere revizuirea deciziilor de numire/transfer/repartizare pe post.

În județul nostru limba de predare al disciplinei poate fi atât limba română , cât și maghiară, germană, slovacă sau chiar limba rromani. În aceste localități limba de predare este de fapt limba maternă al copiilor , care pe lângă disciplinele de bază cuprinse în planul-cadru mai învață și materii opționale precum Istoria și tradiția minorității naționale respective și /sau Educație muzicală în limba maternă.

Subiecții chestionați sunt persoane cu vechimi diferite (începând de la debutant până la cadre experimentate) ,cu grade didactice diverse ,activând la toate nivelurile de învățământ (de la gimnazial până la seral) , chiar și în școli profesionale sau duale sau în unități unde se necesită diferite avize/atestare (ca de exemplu cel de culte, cel pentru educație specială). Ocazional , mai sunt și cadre didactice cu domeniul fundamental aferent domeniului de specializare înscris pe diploma de licență diferit de domeniul matematicii care au urmat un curs de specializare rapidă precum conversia profesională sau poate chiar s-au reprofilat.

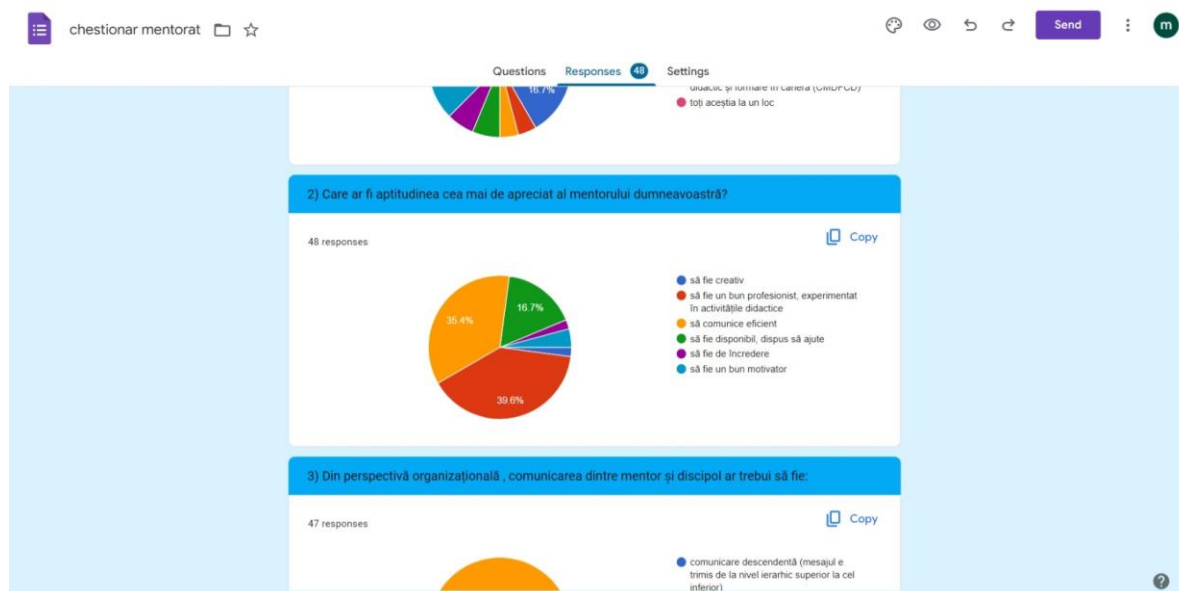
REZULTATE ȘI DISCUȚII

Meseria de profesor este una dintre cele mai complexe din lume. Este solicitantă emoțional și cognitiv. Un profesor ia zeci de decizii importante zilnic, de la designul unei lecții la răspunsurile pe care le dă unui elev sau părinte. Pentru asta are nevoie de susținere și de încredere în forțele proprii , sprijin pe care îl poate obține și de la un mentor. Conform chestionarului mentorul poate fi:

- inspectorul de specialitate(16,7%)
- responsabilul de cerc pedagogic(4,2%)
- directorul unității școlare la care activați(4,2%)
- șeful de catedră din școală(6,3%)
- un coleg de serviciu(6,3%)
- responsabilul Comisiei de mentorat didactic și formare în carieră (CMDFFCD)(16,7%)

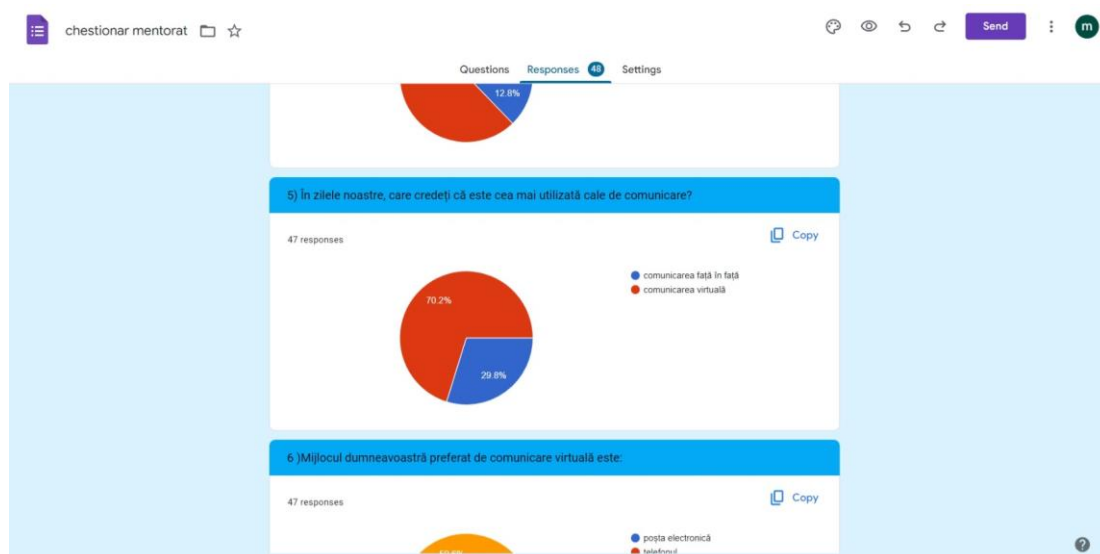
Totuși , aproape jumătate din intervievați (45,8%) au considerat ca și mentor informal potrivit unui începător ansamblul tuturor acestor persoane , deoarece însumând rutina și practica lor debutantul va avea acces la o fântână nesecată de înțelepciune și informații.

Dintre aptitudinile unui mentor chestionații au amintit:



Conform subiecților, comunicarea dintre mentor și discipol ar trebui să fie laterală (83%), adică mesajul să fie trimis de la egal la egal, pentru că de fapt cei doi aparțin aceluiași nivel ierarhic, chiar dacă unul din ei este mai vechi în sistem. De asemenea, ei mai precizează că deși comunicarea scrisă ocupă un loc important în viața modernă totuși, comunicarea orală este modalitatea cel mai des întâlnită (87,2%). Și mai tragem concluzia că, (indiferent de rezultatul chestionarului), pentru a construi o comunicare eficientă este nevoie să alegem și să adaptăm acea tehnică de transmitere a informației care se potrivește cel mai bine cu situația dată.

Din ancheta noastră reiese și faptul că ucenicul trebuie să învețe să gestioneze relația de comunicare mentor- cadru didactic și în mediul online (70,2%) comparativ cu interacțiunea față-în-față. Se urmărește familiarizarea cu modalități de relaționare online, utilizând diferite platforme - ZOOM, TEAMS, GOOGLE CLASSROOM, SKYPE, WHATSAPP, FACEBOOK etc. Participanții la comunicare vor fi familiarizați cu cerințele minime de cunoștințe necesare în vederea utilizării acestor instrumente, pașii de urmat pentru înregistrarea și conectarea pe aceste platforme, gestionarea timpului petrecut online, modalitatea de trimitere a întrebărilor-răspunsurilor, respectarea integrității și a corectitudinii, etc. Se preferă varianta de acces gratuit pe aceste platforme.



Telefonul mobil facilitează și îmbunătățește comunicarea, indiferent de distanță. Mesageria text, apelurile vocale și video, precum și emailurile, sunt la îndemâna oricui, oricând. Telefoanele mobile facilitează participarea în comunități online, menținerea legăturilor sociale prin intermediul rețelelor de socializare. Platformele de socializare, respectiv aplicațiile gratuite de mesagerie instantanee sunt spații digitale în care oamenii, companiile și organizațiile se întâlnesc și interacționează într-un mod netradițional. Sunt potrivite și oamenilor timizi, oferă inovație și versatilitate. Amintim aici platforme precum Facebook, Twitter și Instagram, aplicații ca și messenger, WhatsApp. Deși prezintă numeroase dezavantaje (ca punerea în pericol al confidențialității, răspândirea de informații false sau nesigure, întreruperea ciclului de somn, sedentarismul, reducerea interacțiunilor față-în-față) totuși ele au revoluționat modul în care oamenii comunică, (rezultatul de 59,6 % din testul de față întărind această afirmație).

Din abundența de tipologii al blocajelor, dificultăților, barierelor comunicării, intervievații le-au considerat cele mai relevante pe următoarele:

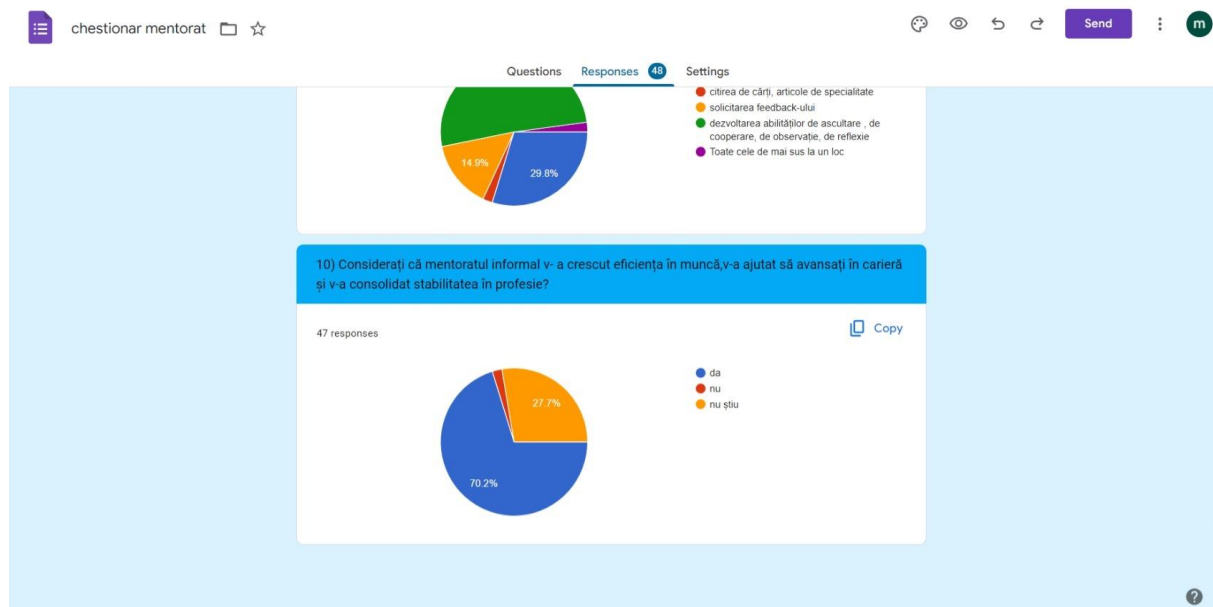


În cazul unei comunicări ineficiente între profesorul mentor și debutant, pot apărea următoarele dezavantaje: neacomodarea angajatului, tranziție dificilă la locul de muncă, stres, frustrare (42,6%), intimidarea stagiului, lipsa sentimentului de apartenență, atitudine negativă față de colectivul școlar, transfer redus de cunoștințe teoretice și practice între colegi, învățare lentă, dificilă, productivitate diminuată (31,9%), insucces, ineficiență, descurajare, nemotivare, nemulțumire (25,5%), inoportunitatea de dezvoltare personală și profesională, neclarificarea nelămuririlor, teama de a-și afirma punctul de vedere, de a-și exprima propriile nevoi, stimă de sine redusă, uneori, gestionare greșită al traseului profesional, loialitate scăzută, îndepărtarea discipolului de relație și chiar întreruperea ei, blocarea comunicării, recrutarea ineficientă a personalului și abandonarea timpurie al instituției și al mediului de învățământ.

Dintre tehnicile de îmbunătățire al comunicării cu mentorul subiecții le-au enumerat pe următoarele:

- participarea la cursuri de formare continuă pe tema comunicării, (29,8%)
- solicitarea feedback-ului, (14,9%)
- dezvoltarea abilităților de ascultare, de cooperare, de observație, de reflexie. (51,1%)

- alegerea unei selecție de cărți (2,1%) , scrise de experți în domeniul comunicării, psihologiei sociale sau leadership-ului, care au reușit să surprindă esența comunicării eficiente și să o transforme într-un instrument puternic pentru dezvoltarea personală și succesul în carieră.



CONCLUZII:

Scopul acestei lucrări a fost de a realiza o sensibilizare al cadrelor didactice și al managerilor de instituții de învățământ , dar și al posibililor beneficiari ai acestor programe cu privire la avantajele pe care mentoratul, activitățile de tutoriat , tehnicile de coaching și chiar și consilierea profesională și trainingul le pot crea în planul misiunii educaționale ,dar și la cunoașterea aportului valoros pe care aceste activități le pot avea în dezvoltarea resursei umane al organismului școlar și în atingerea obiectivelor specifice.

Menționez ca un scop secundar și cunoașterea mai profundă al comunității cadrelor didactice de matematică din județul Bihor ,cărui îi aparțin și eu de 20 de ani. Am vrut să le cunosc experiențele trăite în calitate de debutant, observațiile lor atunci când au interacționat pentru prima oară cu sistemul public de învățământ din rolul de cadru didactic, claritățile/neclaritățile cu privire la responsabilitățile pe care le au ca professor și de la cine pot cere ajutor atunci când au nevoie. Cu siguranță e posibil ca experiențele în școli să fie foarte diverse în ceea ce privește integrarea unui debutant în instituție. Sper totuși , că au găsit printre adulții din școală oameni cu care să rezoneze, să-i poată avea aproape căci, dincolo de orice material, interacțiunea cu ceilalți oameni este cea care dă sentimentul apartenenței și al spațiului securizant în care poată să crească un începător în domeniul respectiv.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Drăgulescu A. (2021), *Cum să devenim profesori cât mai buni*, București , Ed. Universitară
- [2] Mălureanu F. (2017), *Disfuncții în comunicarea educațională*, București, Ed. Universitară
- [3] Pânișoară I. (2008) , *Comunicarea eficientă*, Iași , Ed. Polirom
- [4] Pânișoară I. (2017) , *Ghidul profesorului*, Iași , Ed. Polirom
- [5] Peretti A., Legrand J., Boniface J. (2007), *Tehnici de comunicare*, Iași , Ed. Polirom
- [6] Pop C. (2021), *Metode și tehnici de comunicare în mediul educational* , Cluj, Ed. Presa Universitară Clujeană
- [7] Sburlescu A. (2008) , *Comunicarea eficientă*, București , Ed. All
- [8] Stan C. (2020), *Mentorat și coaching în educație* , Cluj, Ed. Presa Universitară Clujeană
- [9] Whitmore J (2019), *Coaching pentru performanță*, London, Ed Publica

PREDAREA MATEMATICII PRIN INTERMEDIUL APLICAȚIILOR RED

Viorica-Cornelia HOFFMANN-BRONȚ

Liceul Tehnologic Special nr.1 Oradea - Profesor matematică, vigyorika@yahoo.com

Rezumat: Prin definiție, **Resursele Educaționale Deschise** (Open Educational Resources) se referă la accesul deschis la resurse educaționale, facilitat de tehnologiile informației și comunicațiilor, pentru consultare, utilizare și adaptare de către comunitatea utilizatorilor, în scopuri necomerciale. În acest context se înscrie și utilizarea pe larg, inclusiv în sistemul educațional, a tehnologiilor și a resurselor informaționale, dar și facilitarea, prin intermediul acestora, a accesului și a schimbului de informație între diferiți actori. Resursele electronice, conținuturile on-line și spațiile educaționale virtuale contribuie la optimizarea și actualizarea procesului de instruire și educație continuă, oferindu-i cele mai noi și diverse informații și oportunități. În ultimii ani, aspectele ce se referă nemijlocit la datele deschise, inclusiv resursele educaționale deschise, sunt abordate pe larg de către comunitatea educațională internațională, recunoscându-se că promovarea și utilizarea acestora implică o schimbare fundamentală în procesul educațional, contribuind și mai mult la centrarea pe elev și/sau student, dar și la asigurarea accesului universal la educație. La nivelul învățământului special, pentru elevii cu deficiențe mintale moderate și ușoare, severe, grave, profunde sau asociate, precum și pentru preșcolarii și elevii claselor pregătitoare, clasele I și a V-a (unde până în prezent nu există programe școlare), RED-urile sunt utile și după pandemie, elevii cu **Cerințe Educaționale Speciale**, învață mult mai ușor vizual, asimilează mai repede noțiunile predate, ating mult mai ușor obiectivele propuse. RED-urile care au la bază jocuri logice sau matematic distractive, susțin ludoterapia. În cei 2 ani școlari, care au trecut am făcut mai multe cursuri de perfecționare, de formare continuă, privind folosirea unor aplicații de redactare, creare, de jocuri matematice, quizuri, teste online, fișe de lucru online. Din aceste materiale, lecții, fișe, jocuri, aș dori să prezint câteva.

Cuvinte cheie: Matematică, fișe, teste, aplicații, RED-uri, CES.

PREDAREA MATEMATICII PRIN INTERMEDIUL APLICAȚIILOR RED

Am obținut 3 ani la rând, în 3 tranșe, acceptul ISJ Bihor pentru publicarea în biblioteca online a RED-urilor realizate de mine. Anual de 2 ori ISJ Bihor dă șansă cadrelor didactice de a propune RED-uri realizate pe diferite discipline și nivele de învățare. Aceste RED-uri pot fi fișe de lucru, teste de evaluare, materiale educaționale ce se pot accesa prin intermediul unui link, materiale realizate prin intermediul unor aplicații sau site-uri. RED-urile realizate astfel sunt evaluate în 2 tranșe de o comisie a ISJ Bihor. Cele acceptate intră într-o bibliotecă virtuală. Personal, eu sunt încântată de această oportunitate, deoarece pe lângă experiență, am parte de succes, învăț lucruri noi, și nu în ultimul rând dobândesc un Proces Verbal cu viza ISJ Bihor ce îmi îmbogățește dosarul personal.

1. Matematici Financiare

WORLDWALL (<https://wordwall.net>) este o aplicație utilă pentru cadrele didactice deoarece se pot crea jocuri interactive pentru susținerea învățării, fiind posibile de la 1 la 8 modele.

De exemplu: *Cuvântul lipsă, Anagrame, Puzzle, Rebus, Adevărat sau Fals, Sortează, Chestionare, Spânzurătoare, Deschide cutia* etc. Este un instrument digital ușor de utilizat și plăcut de copii datorită elementelor ludice inserate

I. Date generale					
Titlul resursei educaționale deschise propuse	Matematici Financiare				
Disciplina ¹	Matematică				
Clasa ²	XII-a învățământ profesional special X-a învățământ profesional și liceal				
Autor/Autori	Hoffmann Bront Viorica Cornelia				
Scopul materialului propus	Didactic - de utilizat la clasa cuelevii	Pt elev de utilizat de cătreelev	Dedocumentar e pt cadrele didactice	De manage-ment educațional	Altele
	DA				
II. Prezentarea resursei educaționale deschise					
Competența specifică vizată/Indicatori de performanță	- Elevul să recunoască noțiuni, expresii, definiții legate de Matematici financiare - Elevul să asocieze noțiuni și definiții legate de Dobânda simplă și compusă, TVA, preț de vânzare, procentul dobânzii				
Durata resursei (de completatexclusiv pentru resurse video)	10 minute				
Scurtă prezentare a resursei educaționale deschise propuse (10-15 rânduri)	Testul este creat prin intermediul aplicației WordWall, și este un test recapitulativ al capitolului Matematici financiare. Se adresează elevilor din învățământul tehnologic/ profesional și special, unde elevul trebuie să recunoască anumite noțiuni, și trebuie să asocieze noțiunii date, definiția corectă. În învățământul profesional special, noțiunea de matematici financiare se conectează cu lecția Bugetul familiei, unde elevii pot veni cu exemple din viața cotidiană. Testul este format din 9 perechi de noțiuni/definiții, așezate aleator, la nimereală. Sarcina elevului este de a recunoaște noțiunea dată și de a asocia cu definiția corectă a noțiunii. Testul nu presupune memorarea noțiunilor sau a definițiilor, este suficient recunoașterea, asocierea, împerecherea acestora. Este un test accesibil tuturor elevilor. Prin mai multe încercări, prin reluarea testului, elevul poate învăța, fixa noțiunile de la orele de curs.				
Elemente agregate (link-uri la resursele utilizate ca părți componente în construcția resursei, acolo unde este cazul)	https://wordwall.net/ro/resource/66216152/matematic%c4%83/matematici-financiare				
III. Comentarii					
Alte aspecte utile de împărtășit cu privire la utilizarea resursei educaționale deschise în activitatea cu elevii	În momentul de față capitolul matematici financiare este străină, nu prea agreat de elevi. Cu acest test online, am încercat să prezint noțiunile studiate la ora de matematică, puțin mai altfel, prin joc, prin competiție, am încercat să fac acest capitol mai atrăgător elevului. Prin reluarea testului elevul câștigă experiență, își pune la încercare cunoștințele, își verifică cunoștințele. Având în vedere că se adresează și elevilor din învățământul profesional special, materialul corespunde cerințelor curriculumului adaptat elevilor cu nevoi speciale.				

2. Probabilități/ Rebus matematic

Titlul resursei educaționale deschise propuse	Probabilități/ Rebus matematic				
Disciplina ¹	Matematică/ Probabilități				
Clasa ²	a XI-a învățământ profesional de masă a XII-a învățământ profesional special a X-a învățământ liceal de masă				
Autor/Autori	Prof. Hoffmann-Bronț Viorica Cornelia				
Scopul materialului propus	Didactic - de utilizat la clasa	Pt elev –de utilizat de către elev	De documentare pt cadrele didactice	De management educațional	Altele
	DA				
II. Prezentarea resursei educaționale deschise					
Competența specifică vizată/Indicatori de performanță ³	- Recunoașterea unor noțiuni deja studiate - Asocierea definițiilor date cu denumirea acestora - Îmbunătățirea vocabularului matematic. La elevii cu CES, se insistă pe pronunția corectă a acestor denumiri matematice.				
Durata resursei (de completat exclusiv pentru resurse video)	10 minute				
Scurtă prezentare a resursei educaționale deschise propuse (10-15 rânduri)	Exercițiul este un rebus matematic online, pe temă de probabilități. Elevul selectează o linie sau o coloană goală, și automat apare definiția matematică a unei noțiuni matematice/algebrice. Elevul va identifica noțiunea cerută, și va trece soluția în câmpul liber. Exemplu: - la poziția 11 se cere denumirea numerelor care se înmulțesc. Soluția este cuvântul TERMENI. - la poziția 7 se cere denumirea ecuațiilor în care necunoscuta se află sub semnul radical. Soluția este cuvântul IRAȚIONALE - la poziția 9 se cere denumirea ecuațiilor în care necunoscuta se află la exponent/putere. Soluția este cuvântul EXPONENȚIALE				
Elemente agregate (link-urile resursele utilizate ca părți componente în construcția resursei, acolo unde este cazul)	https://learningapps.org/33371730				
III. Comentarii					
Alte aspecte utile de împărtășit cu privire la utilizarea resursei educaționale deschise în activitatea cu elevii	Având în vedere că se adresează și elevilor din învățământul profesional special, materialul corespunde cerințelor curriculumului adaptat elevilor cu nevoi speciale. Rebusul matematic este o formă de joacă. Elevul recapitulează noțiuni matematice studiate, prin joc. Fără să conștientizeze, el este plimbat prin materia parcursă, recapitulează, face conexiuni matematice, redescoperă noțiuni. Noțiunile matematice astfel redefinite, intră mai ușor în vocabularul elevului.				

Learningapps (<https://learningapps.org>) este o platformă care oferă modele de aplicații, precum și posibilitatea creării de conținut; Există aplicații interesante (de exemplu: rebus, unește perechile, puzzle, completează cuvântul lipsă etc.). Avantajul este că se pot partaja (link, cod de încorporare) sau pot fi folosite drept material de învățare pe platforma LearningApps (creând clase în care să îi invitați pe copii; se pot face și sondaje pentru a măsura feed-back-ul)

3. Diagrame pentru reprezentare de date statistice

I. Date generale					
Titlul resursei educaționale deschise propuse	Diagrame pentru reprezentare de date statistice				
Disciplina ¹	Matematică				
Clasa ²	XII-a învățământ profesional special X-a învățământ tehnologic/profesional				
Autor/Autori	Hoffmann Bronț Viorica Cornelia				
Scopul materialului propus	Didactic - de utilizat la clasa culevii	Pt elev –de utilizat de către elev	De documentare ptcadrele didactice	De management educațional	Altele
	X				
II. Prezentarea resursei educaționale deschise					
Competența specifică vizată/Indicatori de performanță	Elevul să recunoască tipurile de diagrame utilizate pentru reprezentarea datelor statistice. Elevul să poată asocia denumirilor de diagrame cu imaginea diagramei respective				
Durata resursei (de completat exclusiv pentru resurse video)	10 minute				
Scurtă prezentare a resursei educaționale deschise propuse (10-15rânduri)	Resursa educațională deschisă este realizată prin intermediul aplicației learningapp. Materialul este o recapitulare a tipurilor de diagrame utilizate la reprezentarea datelor statistice. Nu se cere memorarea denumirilor, este suficient ca elevul să recunoască imaginea diagramei și să asocieze cu denumirea matematică a acesteia. Tipurile de diagrame prezentate sunt: diagrama circulară, grafice de timp, histograma, diagrama grafică, diagrama de arie, diagrama dot-plot, diagrama liniară, diagrama radială, diagrama tip coloană, diagrama de tip punct/ Scatterplotz, diagrama de tip bară orizontală.				
Elemente agregate (link-urile resursele utilizate ca părți componente în construcția resursei, acolo unde este cazul)	https://learningapps.org/33374356				
III. Comentarii					
Alte aspecte utile de împărtășit cu privire la utilizarea resursei educaționale deschise în activitatea cu elevii	Acest capitol este prezentat foarte pe scurt în manualul școlar dar este inclus în curriculumul claselor de liceu și profesional, din această cauză numărul materialelor folosite la acest capitol este foarte limitat. Pentru elevii din învățământul liceal nivel1 și școli profesionale am dorit să realizez un exercițiu mai simplu mai accesibil dar și interesant. Prin asocierea de imagini elevul va asimila mult mai ușor partea teoretică, va fixa vizual denumirile, termenii matematici. Elevul poate relua exercițiul, poate exersa, poate să se autotesteze/ autoevaluea. Având în vedere că se adresează și elevilor din învățământul profesional special, materialul corespunde cerințelor curriculumului adaptat elevilor cu nevoi speciale.				

BIBLIOGRAFIE

- [1] Ghid pentru aplicarea practicilor educaționale deschise în timpul pandemiei de coronavirus. Utilizarea resurselor educaționale deschise în conformitate cu Recomandările UNESCO, Mai 2020, versiunea 1.0
[2] Repere orientative pentru școala online, ghid metodologic pentru învățători, Brașov, 2020.
[3] Ghid practic de resurse educationale si digitale pentru instruire online ,Editura Universității de Vest, 2020

- [4] *Ghid suport pentru profesorii implicați în procesul de adaptare curriculară în cazul copiilor/elevilor cu ces integrați în învățământul de masă*, 2020
- [5] *Resurse educaționale deschise: oportunități pentru acces, calitate și relevanță în educație*, Chișinău, 2017, Colecția Biblioteca Pro Didactica

APLICAREA INDUCȚIEI MATEMATICE ÎN STUDIUL UNOR INEGALITĂȚI

Daiana IAGĂR ¹, Alina ALB LUPAȘ ²

¹ Studentă anul II Master, Structuri matematice fundamentale, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea, daianaiaagar@gmail.com

² Conf. univ. dr. la Departamentul de Matematică și Informatică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea, alblupas@gmail.com

Rezumat: În această lucrare sunt demonstrate câteva inegalități binecunoscute folosind diferite tipuri de inducție matematică.

Cuvinte cheie: inducția matematică, inegalități

Metoda inducției matematice, respectiv inducția completă, are un domeniu de aplicabilitate în matematică destul de restrâns, deoarece în cele mai multe cazuri propozițiile matematice se referă la o mulțime infinită de elemente (având o infinitate de cazuri particulare). Practic este imposibil de analizat pe rând toate cazurile particulare ale acestora, pentru a putea trage concluzia că sunt adevărate în general.

Ne punem următoarea întrebare: Cum putem ști că o anumită ipoteză este adevărată în general, dacă ea este adevărată în unele cazuri particulare, dar nu este posibil să considerăm pe rând toate cazurile particulare?

În matematică analiza unei infinitați de cazuri pentru verificarea unei ipoteze se poate înlocui cu demonstrarea faptului că, dacă o anumită propoziție este adevărată într-un caz, atunci ea se dovedește a fi adevărată și în cazul următor (de exemplu, dacă $P(n)$ este adevărată, atunci $P(n+1)$ este adevărată). O astfel de metodă de raționament se numește inducție matematică.

Ca model de inducție matematică putem lua următorul raționament: » O cauza a apariției Soarelui la răsărit este o rotire de 24 de ore a Pământului în jurul axei sale. Dacă azi Soarele a apărut la răsărit, atunci după 24 ore Pământul și Soarele se vor afla din nou în aceeași poziție și noi vom observa aceleași fenomene. Deci noi îl vom putea observa după 24 de ore și din nou după încă 24 de ore și în felul acesta îl putem vedea în fiecare dimineață. « Acest raționament nu este cu totul exact pentru că nu se are în vedere mișcarea Pământului s.a.m.d.

În matematică însă, o astfel de schema de raționament se dovedește adesea a fi folositoare. Să

calculăm de exemplu sumele următoare: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4}$

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2}, S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}, S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4}, S_4 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5}$$

Obținem numerele:

$$S_1 = 1/2, S_2 = 2/3, S_3 = 3/4, S_4 = 4/5.$$

Observând rezultatele obținute, constatăm că numărătorul este indicele sumei căutate, iar numitorul este succesul său. În acest moment, formulăm următoarea ipoteză:

«Pentru orice număr natural n , are loc egalitatea:

$$(1.2.1) \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Notând această propoziție cu $P(n)$, am constatat că $P(1), P(2), P(3), P(4)$, sunt adevărate și deci egalitatea (1.2.1.) are loc pentru $n=1, n=2, n=3, n=4$. După cum am observat în cele anterioare, aceste verificări nu dau demonstrația faptului că $P(n)$ este adevărată, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Pentru oricât de multe numere am verifica, întotdeauna există posibilitatea ca printre numerele rămase să existe unul pentru care egalitatea (1.2.1.) să nu fie îndeplinită. Trebuie să probăm afirmația care este analoagă propoziției "după 24 de ore Pământul și Soarele se vor afla din nou în aceeași poziție și noi vom observa același fenomen". Cu alte cuvinte, trebuie să demonstrăm că dacă

$$(1.2.2.) \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

atunci o astfel de egalitate va fi îndeplinită și după ce se adaugă la membrul stâng al egalității termenul următor $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ și se schimbă, simultan, membrul drept prin $\frac{k+1}{k+2}$, adică

(1.2.3)

$$\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Astfel demonstrarea valabilității egalității (1.2.1) nu numai pentru numerele $n=1, n=2, n=3, n=4$, ci pentru toate numerele naturale, revine la a demonstra că dacă egalitatea (1.2.2) este adevărată, atunci este adevărată și egalitatea (1.2.3). Egalitatea (1.2.3) se scrie

$$\left[\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} \right] + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Dar, după presupunerea noastră (egalitatea (1.2.2)), termenul dintre parantezele mari se poate înlocui cu $\frac{k}{k+1}$ și atunci avem

$$\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

adică egalitatea

$$\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

Așadar am arătat că egalitatea (1.2.1) este adevărată pentru $n=1$ și presupunând că este adevărată pentru $n=k$ (orice ar fi $k \geq 1$) rezultă că este adevărată și pentru $n=k+1$. Cu alte cuvinte, $P(1)$ este adevărată (1 este primul număr pentru care propoziția are sens), iar $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Cum $P(1)$ este adevărată, rezultă că $P(2)$ este adevărată, deoarece $2=1+1$ apoi, $P(3)$ este adevărată, deoarece $3=2+1$ ș.a.m.d. Pare evident că în modul acesta se poate ajunge până la orice număr n și se poate demonstra că $P(n)$ este adevărată. Cu alte cuvinte, pare evident că propoziția $P(n)$ despre care știm că este adevărată pentru $n=1$ (prima valoare a lui n , pentru care propoziția este adevărată) și că pentru orice $k \geq 1$ din $P(k)$ rezultă $P(k+1)$, este adevărată pentru toate numerele naturale $n \geq 1$.

În mod intuitiv, raționamentul făcut pare convingător. El este riguros d.p.d.v. matematic, având la bază un principiu matematic, numit principiul inducției matematice.

Raționamentul făcut mai înainte are două etape importante:

- I. Pe baza analizei câtorva cazuri particulare se formulează o propoziție $P(n)$, în enunțul căreia intervine numărul natural n , mai mare decât numărul n_0 (n_0 este primul număr natural rezultat în urma analizei cazurilor particulare, pentru care propoziția este adevărată).
- II. Se demonstrează că, dacă propoziția $P(n)$ este adevărată și pentru numărul $k, k \geq n_0$ fiind un număr natural oarecare, atunci ea este adevărată și pentru numărul $k+1$.

În acest caz demonstrația (prin inducție matematică) se face astfel:

1. Se verifică faptul că propoziția $P(n)$, definită pentru $n \geq n_0$, este adevărată pentru numărul n_0 .
2. Se presupune că $P(k)$ este adevărată și se arată că $P(k+1)$ este adevărată, unde $k \geq n_0$ este numărul natural oarecare.

Ambele etape ale demonstrației prin inducție matematică sunt la fel de importante. Nu trebuie să se scape din vedere verificarea faptului că $P(n_0)$ este adevărată.

Să reluăm raționamentul care se face în demonstrația prin metoda inducției matematice. Dacă o propoziție $P(k)$ este adevărată rezultă că $P(k+1)$ este adevărată, pentru orice $k \geq n_0$, atunci rezultă că

$P(n_0 + 1)$ este adevărată, $P(n_0 + 2)$ este adevărată și în general $P(n)$ este adevărată pentru toate numerele naturale $n \geq n_0$. Prin acest raționament noțiunea de număr natural s-a considerat ca fiind evidentă.

În cele ce urmează vom prezenta alte tipuri de inducție matematică cum sunt : inducția cu pas, inducția Ehlers și inducția Cauchy.

- În unele cazuri, destul de rare e drept, de folos în demonstrarea inegalităților ne poate fi principiul inducției de pas k .

Fie $k, a \in \mathbb{N}, k \geq 2$ și $P(n)$ un predicat peste $\mathbb{N}$.

Dacă

$P(a), P(a+1), \dots, P(a+k-1)$ sunt adevărate și $P(n) \Rightarrow P(n+k)$ pentru orice $n \geq a$, atunci

$P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq a$.

Vom demonstra inegalitatea

$$(1.2.4.) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n - x_1 x_2 - x_2 x_3 - \dots - x_{n-1} x_n \leq \left[\frac{n}{2} \right], \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1], n \geq 3,$$

Prin inducție de pas 2. De ce inducție de pas 2? Pentru că $\left[\frac{n}{2} \right]$ crește cu o unitate când n crește cu două

unități. Să demonstrăm atunci inegalitatea în cazurile $n=3$ și $n=4$. Pentru $n=3$, (1.2.4.) devine

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1 \leq 1 \Leftrightarrow -x_1 x_2 x_3 \leq (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$$

și se constată că este adevărată. Pentru $n=4$, (1.2.4.) devine

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_4 - x_4 x_1 \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x_2 x_3 - x_4 x_1 \leq (1-x_1)(1-x_2) + (1-x_3)(1-x_4)$$

și este și ea adevărată. Să considerăm că (1.2.4.) este adevărată pentru un $n \geq 3$ arbitrar și să o demonstrăm pentru $n+2$. Avem

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + \dots + x_{n+2} - x_1 x_2 - x_2 x_3 - \dots - x_{n+1} x_{n+2} - x_{n+2} x_1 = \\ & (x_1 + x_2 + \dots + x_n - x_1 x_2 - x_2 x_3 - \dots - x_{n-1} x_n - x_n x_1) + x_{n+1} + x_n x_1 - x_n x_{n+1} - x_{n+1} x_{n+2} - x_{n+2} x_1 \leq \\ & \left[\frac{n}{2} \right] + x_{n+1} + x_{n+2} + x_n x_1 - x_n x_{n+1} - x_{n+1} x_{n+2} - x_{n+2} x_1 \leq (?) \left[\frac{n+2}{2} \right] \end{aligned}$$

unde

$$x_{n+1} + x_{n+2} + x_n x_{n+1} - x_{n+2} x_n - x_{n+2} x_1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq (1-x_{n+1})(1-x_{n+2}) + x_n x_{n+1} + x_1(x_{n+2} - x_n)$$

Poate fi considerată adevărată deoarece putem viola simetria circulară cu presupunerea $x_{n+2} \geq x_n$. Cazul de egalitate din (1.2.4.) este mai greu de analizat.

Vom vedea că tot de inducție de pas 2 avem nevoie și pentru inegalitatea

$$(1.2.5.) \quad a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - \dots + (-1)^{n-1} a_n^2 \geq (a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n-1} a_n)^2 \quad a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0, n \geq 2.$$

(L.D.Kurliandcik)

Dacă privim diferența dintre expresia din membrul stâng și cea din membrul drept ca funcție de a_1 , atunci avem

$$f(a_1) = 2(a_2 - a_3 + a_4 - \dots + (-1)^n a_n) a_1 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots - (-1)^{n-1} a_n^2 - (a_2 - a_3 + a_4 - \dots + (-1)^n a_n)^2.$$

Dacă n este par, atunci coeficientul lui a_1 este pozitiv, iar dacă n este impar, atunci coeficientul lui a_1 este pozitiv cu excepția cazului în care avem $a_1 = a_3, a_4 = a_5, \dots, a_{n-1} = a_n$ caz în care inegalitatea (1.2.5.) se verifică cu egal.

Când coeficientul lui a_1 este pozitiv, funcția f este strict crescătoare și atunci $a_1 \geq a_2$ obținem

$$\begin{aligned} f(a_1) & \geq f(a_2) = 2(a_2 - a_3 + a_4 - \dots + (-1)^n a_n) a_1 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots - (-1)^{n-1} a_n^2 - (a_2 - a_3 + a_4 - \dots + (-1)^n a_n)^2 \\ & = a_3^4 - a_4^2 - \dots + (-1)^{n-1} a_n^2 - (a_3 - a_4 + a_5 - \dots + (-1)^{n-1} a_n)^2 \end{aligned}$$

ultima inegalitate fiind inegalitatea (1.2.5.) în cazul $n-2$. Deci dacă (1.2.5.) este adevărată în cazul $n-2$ atunci ea este adevărată și în cazul n . Iată, că fără să ne fi propus, am demonstrat implicația inductivă de pas 2. Finalizăm demonstrația prin inducție a inegalității (1.2.5.), demonstrând această inegalitate în cazurile $n=2$ și $n=3$. Pentru $a_1 \geq a_2 > 0$ avem

$$a_1^2 - a_2^2 > (a_1 - a_2)^2 \quad 2(a_1 - a_2)a_2 \geq 0$$

ceea ce înseamnă că pentru $n=2$, (1.2.5.) este adevărată verificându-se cu egal când $a_1 = a_2$.

Cu $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ avem

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \geq (a_1 - a_2 + a_3)^2$$

$$(a_1 - a_2)(a_1 + a_2) - (a_1 - a_2)(a_1 - a_2 + 2a_3) \geq 0 \quad 2(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \geq 0$$

Ceea ce înseamnă că (1.2.5.) este adevărată și în cazul $n=3$ și se verifică cu egal pentru $a_1 = a_2$ sau pentru $a_2 = a_3$. Când n este par, inegalitatea (1.2.5.) se verifică cu egal pentru $a_1 = a_2, a_3 = a_4, \dots, a_{n-1} = a_n$, iar când n este impar avem egalitatea în (1.2.5.) fie pentru $a_1 = a_2, a_3 = a_4, \dots, a_{n-2} = a_{n-1}$ fie pentru $a_2 = a_3, a_4 = a_5, \dots, a_{n-1} = a_n$.

Felul în care arată inegalitatea

$$(1.2.6) \quad x_1 x_2 \dots x_n - \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \geq x_1 - \frac{1}{x_1} + x_2 - \frac{1}{x_2} + \dots + x_n - \frac{1}{x_n}, \quad x_1, x_2, \dots, x_n \geq 1, n \geq 2,$$

“te invita” la inducție. Pentru $n = 2$ inegalitatea se reduce la

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_1 x_2 - 1) \geq 0$$

și presupunând că pentru un $n \geq 2$ ea este adevărată, avem

$$x_1 x_2 \dots x_{n+1} - \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_{n+1}} \geq x_1 x_2 - \frac{1}{x_1 x_2} + x_3 - \frac{1}{x_3} + x_4 - \frac{1}{x_4} + \dots + x_{n+1} - \frac{1}{x_{n+1}} \geq$$

$$x_1 - \frac{1}{x_1} + x_2 - \frac{1}{x_2} + \dots + x_{n+1} - \frac{1}{x_{n+1}}$$

Să analizăm condițiile care trebuie verificate pentru ca (1.2.6.) să devină egalitate. În cazul $n = 2$, egalul se atinge când $x_1 = 1$ sau $x_2 = 1$ sau $x_1 x_2 = 1$. Pentru $n = 3$, pe lângă una dintre aceste condiții mai trebuie verificat cel puțin una din condițiile $x_1 x_2 = 1, x_3 = 1, x_1 x_2 x_3 = 1$ sau $x_1 x_3 = 1$ și mai constatăm că egalitatea se analizează greu.

Dacă $x_1 x_2 = 1$, atunci $x_1 - \frac{1}{x_1} = x_2 - \frac{1}{x_2} = 0$ și în locul inegalității (1.2.6.) din cazul n obținem aceeași

inegalitate dar în cazul $n - 2$. Aceasta înseamnă că, dacă reușim să arătăm că pentru a avea egalitate în (1.2.6.) pentru $n \geq 4$ e nevoie să avem $x_1 x_2 = 1$, eventual după o renotare a variabilelor, atunci, folosind inducția de pas 2 vom reuși să analizăm cazul de egalitate. Așa ceva ne reușește dacă putem folosi pentru demonstrația inegalității (1.2.6.) cazul $n = 3$ al acestei inegalități. Avem, pentru o inducție de pas 2,

$$\frac{1}{x_1 x_2 \dots x_{n+1}} \geq x_1 x_2 - \frac{1}{x_1 x_2} + x_3 - \frac{1}{x_3} + x_4 - \frac{1}{x_4} + \dots + x_{n+1} - \frac{1}{x_{n+1}} \geq x_1 - \frac{1}{x_1} + x_2 - \frac{1}{x_2} + \dots + x_{n+1} - \frac{1}{x_{n+1}}$$

a doua inegalitate fiind verificată cu egal când $x_1 x_2 = 1$ sau $x_2 x_3 = 1$ sau $x_3 x_1 = 1$. Acum putem deduce ușor că pentru n par avem egalitate în (1.2.6.) când $x_1 x_2 = x_3 x_4 = \dots = x_{n-3} x_{n-2} = 1$ și fie $x_{n-1} = 1$, fie $x_{n-1} x_n = 1$, eventual după o renotare a variabilelor iar pentru n impar avem egalitate când, eventual după o renotare a variabilelor, $x_1 x_2 = x_3 x_4 = \dots = x_{n-2} x_{n-1} = 1$.

Inspirați de o demonstrație dată de Ehlers inegalității mediilor, vom numi inducție Ehlers inducția uzuală aplicată însă după o anumită pregătire a inegalității, adesea o normare. Vom înțelege mai bine acest tip de inducție urmărind exemplele ce urmează.

Să demonstrăm pentru început inegalitatea mediilor

$$(1.2.7) \quad \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0, n \leq 2.$$

Cum diferența dintre cei doi membri este o funcție omogenă de grad unu, putem norma punând $x_1 x_2 \dots x_n = 1$, caz în care inegalitatea de demonstrat devine $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$.

Alegem atunci, pentru o demonstrație prin inducție, predicatul $P(n)$: ”pentru orice $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, dacă $x_1 x_2 \dots x_n = 1$, atunci $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$ ”.

Inegalitatea din concluzie verificându-se cu egal dacă și numai dacă $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$.

$P(2)$ este adevărată, deoarece, pentru $x_1, x_2 > 0$, $x_1, x_2 = 1$, avem $x_1 + x_2 = x_1 + \frac{1}{x_2} \geq 2$ cu egalitate pentru $x_1 = x_2 = 1$.

Să presupunem că, pentru un $n \geq 2$ arbitrar, $P(n)$ este adevărată

și pentru a demonstra valabilitatea lui $P(n+1)$ să considerăm $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} > 0$ cu $x_1 x_2 \dots x_{n+1} = 1$. Conform ipotezei inductive avem

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} \geq n.$$

Acum, pentru a demonstra că

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} \geq n+1,$$

e suficient să arătăm că

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} \geq x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} + 1.$$

Această inegalitate se reduce la

$$x_n + x_{n+1} \geq x_n x_{n+1} + 1 \Leftrightarrow (x_n - 1)(1 - x_{n+1}) \geq 0.$$

Condiția $x_1 x_2 \dots x_{n+1} = 1$ ne asigură că nu putem avea toți $x_i < 1$ și nici toți $x_i > 1$. Există atunci măcar un $x_i \geq 1$ și măcar un $x_j \leq 1$. Datorită simetriei expresiilor $x_1 x_2 \dots x_{n+1}$ și $x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}$, putem considera că notațiile au fost făcute astfel încât să avem $x_n \geq 1$ și $x_{n+1} \leq 1$ ceea ce înseamnă că putem valida inegalitatea de care avem nevoie. Avem egalitate

în inegalitatea $x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} \geq n+1$ când, pe de o parte $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x_n x_{n+1} = 1$ și pe de altă parte $x_n = 1$ sau $x_{n+1} = 1$, deci pentru $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1} = 1$.

O altă demonstrație a aceleiași inegalități prin același tip de inducție se face pornind de la normare $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$, caz în care avem de arătat că

„pentru orice $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, dacă $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$, atunci $x_1 x_2 \dots x_n \leq 1$,

Inegalitatea din concluzie verificându-se cu egal dacă și numai dacă $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ „.

Pentru $n = 2$ avem de arătat că $x_1 x_2 \leq 1$ unde $x_1 + x_2 = 2, x_1, x_2 > 0$. Avem

$$x_1 x_2 \leq 1 \Leftrightarrow x_1(2 - x_1) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq (x_1 - 1)^2,$$

inegalitatea verificată cu egal pentru $x_1 = x_2 = 1$. Presupunând în continuare că afirmația făcută este adevărată pentru un $n \geq 2$, să demonstrăm pentru $n = 1$.

Fie $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} > 0$ verificând condiția

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = n+1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} + (x_n + x_{n+1} - 1) = n.$$

Din nou nu putem avea toți $x_i < 1$ și nici toți $x_i > 1$. Putem considera atunci $x_n \geq 1$ și $x_{n+1} \leq 1$ de unde obținem și că $x_n + x_{n+1} - 1 > 0$. Avem atunci, conform ipotezei inductive,

$$x_1 x_2 \dots x_{n-1} (x_n + x_{n+1} - 1) \leq 1$$

Cum și inegalitatea

$$x_1 x_2 \dots x_{n+1} \leq x_1 x_2 \dots x_{n-1} (x_n + x_{n+1} - 1) \Leftrightarrow x_n x_{n+1} \leq x_n + x_{n+1} - 1 \Leftrightarrow (x_n - 1)(x_{n+1} - 1) \leq 0$$

este adevărată, obținem printr-o intercalare inegalitatea de demonstrat. Aceasta se verifică cu egal când sunt verificate condițiile $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x_n + x_{n+1} - 1 = 1$ și $(x_n - 1)(x_{n+1} - 1) = 0$ adică

$x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1} = 1$. Cu acesta se încheie cea de a doua demonstrație prin inducție Ehlers a inegalității mediilor.

Pentru a demonstra inegalitatea dintre media aritmetică și cea pătratică

$$(1.2.8) \quad \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}},$$

putem norma putând $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ și avem atunci de arătat că „pentru orice $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$,

dacă $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$, atunci $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq n$, egalul fiind atins dacă și numai dacă $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$.”

În cazul $n = 2$ trebuie să dovedim că $x_1^2 + x_2^2 \geq 2$ unde $x_1 + x_2 = 2, x_1, x_2 > 0$.

Avem

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 2 \Leftrightarrow x_1^2 + (2 - x_1)^2 \geq 2 \Leftrightarrow 2(x_1 - 1)^2 \geq 0$$

Inegalitate verificată cu egal pentru $x_1 = x_2 = 1$. Să presupunem că afirmația făcută este adevărată pentru un $n \geq 2$ arbitrar și să o demonstrăm pentru $n + 1$. Fie $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} > 0$ cu

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = n + 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n + (x_n + x_{n+1} - 1) = n$$

Conform ipotezei inductive

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + (x_n + x_{n+1} - 1)^2 \geq n$$

dacă $x_n + x_{n+1} - 1 > 0$. Inegalitatea de care ne iavem nevoie, adică

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 \geq x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + (x_n + x_{n+1} - 1)^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_n^2 + x_{n+1}^2 \geq (x_n + x_{n+1} - 1)^2 + 1 \Leftrightarrow (x_n - 1)(1 - x_{n+1}) \geq 0$$

o putem accepta deoarece putem presupune că $x_n = \max(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ și $x_{n+1} = \min(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ și atunci $x_n \geq 1 \geq x_{n+1}$ caz în care avem și $x_n + x_{n+1} - 1 \geq 0$. Inegalitatea din cazul $n + 1$ se verifică cu egal când sunt îndeplinite condițiile $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x_n + x_{n+1} - 1 = 1$ și $(x_n - 1)(1 - x_{n+1}) = 0$, deci când $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1} = 1$.

Să încercăm *inducția Ehlers* și în cazul *inegalității Huygens*:

$$(1.2.9.) \quad \sqrt[n]{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \dots (x_n + y_n)} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} + \sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \geq 0, n \geq 2,$$

inegalitate verificată cu egal numai dacă $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ și $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ sunt proporționale.

Avem posibilitatea de a reduce numărul de variabile împărțind prin $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ și notând $a_i = \frac{y_i}{x_i}$

pentru toți $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Obținem în locul inegalității (1.2.9.) inegalitatea

$$(1.2.10.) \quad \sqrt[n]{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)} \geq 1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0, n \geq 2,$$

inegalitate verificată cu egal pentru $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Ar fi plăcut să considerăm că $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Din păcate absența omogenității nu ne permite aceasta.

Apelăm la un subterfugiu și punem $a_1 a_2 \dots a_n = p^n$. Pentru o demonstrație prin inducție considerăm predicatul

P(n): „pentru orice $p, a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

$$\text{dacă } a_1 a_2 \dots a_n = p^n, \text{ atunci } (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq (1 + p)^n,$$

inegalitatea verificându-se cu egal dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n = p$ ”.

În cazul $n = 2$ avem de arătat că $(1 + a_1)(1 + a_2) \geq (1 + p)^2$, unde $a_1 a_2 = p^2$,

$p, a_1, a_2 > 0$. Inegalitatea de demonstrat devine

$$(1+a_1)\left(1+\frac{p^2}{a_1}\right) \geq (1+p)^2 \Leftrightarrow a_1 + \frac{p^2}{a_1} \geq 2p \Leftrightarrow (a_1 - p)^2 \geq 0,$$

este adevărată și se verifică cu egal pentru $a_1 = a_2 = p$. Să considerăm că, pentru un $n \geq 2$ arbitrar, $P(n)$ este adevărată și să demonstrăm că $P(n+1)$ este adevărată. Fie pentru aceasta un $p > 0$ fixat și $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} > 0$ verifică condiția

$$a_1 a_2 \dots a_{n+1} = p^{n+1} \Leftrightarrow a_1 a_2 \dots a_{n-1} \left(\frac{a_n a_{n+1}}{p} \right) = p^n.$$

Conform ipotezei inductive,

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{n-1}) \left(1 + \frac{a_n a_{n+1}}{p} \right) \geq (1+p)^n.$$

Dacă și

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{n+1}) \geq (1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{n-1}) \left(1 + \frac{a_n a_{n+1}}{p} \right) (1+p),$$

atunci egalitatea (1.2.10) se verifică în cazul $n+1$. Or această inegalitate devine

$$\begin{aligned} (1+a_n)(1+a_{n+1}) &\geq \left(1 + \frac{a_n a_{n+1}}{p} \right) (1+p) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_n + a_{n+1} \geq p + \frac{a_n a_{n+1}}{p} \Leftrightarrow (a_n - p)(p - a_{n+1}) \geq 0 \end{aligned}$$

și este adevărată căci, datorită simetriei, putem presupune că notațiile au fost făcute astfel încât să avem $a_n \geq p$ și $a_{n+1} \leq p$. Se constată ușor că și cazul de egalitate este cel din enunț.

Vom aplica inducția Ehlers și pentru a demonstra inegalitatea

$$(1.2.11.) \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^n} \leq \frac{\prod_{i=1}^n (1-x_i)}{\left(\sum_{i=1}^n (1-x_i) \right)^n}, \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in \left(0, \frac{1}{2} \right), n \geq 2,$$

după ce vom pune această inegalitate sub o formă mai comodă.

Punând $x_i = \frac{1}{2} - \frac{a_i}{2}$, $a_i \in (0,1)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, inegalitatea (1.2.11) devine

$$\begin{aligned} &\frac{\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} - \frac{a_i}{2} \right)}{\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} - \frac{a_i}{2} \right) \right)^n} \leq \frac{\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} + \frac{a_i}{2} \right)}{\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} + \frac{a_i}{2} \right) \right)^n} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\prod_{i=1}^n (1-a_i)}{\left(\sum_{i=1}^n (1-a_i) \right)^n} \leq \frac{\prod_{i=1}^n (1+a_i)}{\left(\sum_{i=1}^n (1+a_i) \right)^n} \Leftrightarrow \frac{\prod_{i=1}^n (1-a_i)}{\prod_{i=1}^n (1+a_i)} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^n (1-a_i)}{\sum_{i=1}^n (1+a_i)} \right)^n \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$(1.2.12.) \quad \prod_{i=1}^n \frac{1-a_i}{1+a_i} \leq \frac{\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}\right)^n}, \quad a_1, a_2, \dots, a_n \in (0,1), n \geq 2,$$

Fie atunci

$P(n)$: ”pentru orice $A, a_1, a_2, \dots, a_n \in (0,1)$

$$\text{dacă } a_1 + a_2 + \dots + a_n = nA, \text{ atunci } \frac{1-a_1}{1+a_1} \frac{1-a_2}{1+a_2} \dots \frac{1-a_n}{1+a_n} \leq \left(\frac{1-A}{1+A}\right)^n,$$

inegalitate verificată cu egal dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n = A$ ”.

Să demonstrăm că $P(2)$ este adevărată. Avem de arătat că

$$\frac{1-a_1}{1+a_1} \frac{1-a_2}{1+a_2} \leq \left(\frac{1-A}{1+A}\right)^2, \text{ unde } a_1 + a_2 = 2A, \quad a_1, a_2 \in (0,1)$$

Această inegalitate devine

$$\begin{aligned} (1-a_1)(1-a_2)(1+A)^2 &\leq (1+a_1)(1+a_2)(1+A)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1+A)^2 - (a_1+a_2)(1+A)^2 + a_1a_2(1+A)^2 \leq \\ &\leq (1-A)^2 + (a_1+a_2)(1-A)^2 + a_1a_2(1-A)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 \leq -4A + 2(a_1+a_2)(1+A)^2 - 4a_1a_2A \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 \leq -4A + 4A(1+A)^2 - 4a_1a_2A \Leftrightarrow 4a_1a_2 \leq 4A^2 = (a_1+a_2)^2. \end{aligned}$$

Cum această inegalitate este adevărată și se verifică cu egal pentru $a_1 = a_2 = A$, deducem că $P(2)$ este adevărată. Să presupunem că $P(n)$ este adevărată pentru un $n \geq 2$ și să demonstrăm valabilitatea lui $P(n+1)$.

Fie $A, a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in (0,1)$ cu

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = (n+1)A \Leftrightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + (a_n + a_{n+1} - A) = nA.$$

Presupunerea $a_n \leq A \leq a_{n+1}$ nu este selectivă și cu aceasta obținem $0 < a_n + a_{n+1} - A \leq 1$.

Conform lui $P(n)$ avem

$$\frac{1-a_1}{1+a_1} \frac{1-a_2}{1+a_2} \dots \frac{1-a_{n-1}}{1+a_{n-1}} \frac{1-a_n - a_{n+1} + A}{a_n + a_{n+1} - A} \leq \left(\frac{1-A}{1+A}\right)^n$$

Ne rămâne de testat valabilitatea inegalității

$$\frac{1-a_1}{1+a_1} \frac{1-a_2}{1+a_2} \dots \frac{1-a_{n+1}}{1+a_{n+1}} \leq \frac{1-a_1}{1+a_1} \frac{1-a_2}{1+a_2} \dots \frac{1-a_{n-1}}{1+a_{n-1}} \frac{1-a_n - a_{n+1} + A}{1+a_n + a_{n+1} - A} \frac{1-A}{1+A}.$$

Aceasta devine

$$\begin{aligned} \frac{1-a_n}{1+a_n} \frac{1-a_{n+1}}{1+a_{n+1}} &\leq \frac{1-a_n - a_{n+1} + A}{1+a_n + a_{n+1} - A} \frac{1-A}{1+A}. \\ &\Leftrightarrow (1-a_n)(1-a_{n+1})(1+a_n+a_{n+1}-A)(1+A) \leq \\ &\leq (1+a_n)(1+a_{n+1})(1-a_n-a_{n+1}+A)(1-A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1-a_n-a_{n+1}+a_na_{n+1})(1+a_n+a_{n+1}+Aa_n+Aa_{n+1}-A^2) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (1+a_n+a_{n+1}+a_n a_{n+1})(1-a_n-a_{n+1}+Aa_n+Aa_{n+1}-A^2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (1+a_n a_{n+1})(-2a_n-2a_{n+1})+(a_n+a_{n+1})(2+2Aa_n+2Aa_{n+1}-2A^2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 \leq -1-a_n a_{n+1}+1+Aa_n+Aa_{n+1}-A^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a_n-A)(A-a_{n+1}). \end{aligned}$$

Putem accepta această inegalitate deoarece putem presupune $a_n \geq A \geq a_{n+1}$ caz în care este verificată și condiția $a_n + a_{n+1} - A \in (0,1)$. Inegalitatea se verifică cu egal în condițiile din enunț.

* Un tip special de inducție este dat de *principiul de inducție Cauchy*.

Fie $P(n)$ un predicat peste $\mathbb{N}$. Dacă

$P(2)$ este adevărat,

$P(n) \Rightarrow P(2n)$ pentru orice $n \geq 2$ și

$P(n) \Rightarrow P(n-1)$ pentru orice $n \geq 4$,

Atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq 2$.

Avantajul inducției Cauchy în comparație cu inducția standard constă în faptul că adesea în cazul unei inegalități se poate trece mai ușor de la cazul n la cazul $2n$ decât la cazul $n+1$. Apoi “coborârea” de la cazul n la cazul $n-1$ ar trebui să se facă relativ ușor, prin particularizare.

Pentru a demonstra inegalitatea mediilor

$$(1.2.7.) \quad \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad x_1, x_2, \dots, x_n > 0, n \geq 2,$$

prin inducție Cauchy, considerăm predicatul

$$P(n): \text{''pentru orice } x_1, x_2, \dots, x_n > 0, \quad \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

inegalitate verificată cu egal dacă și numai dacă $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

$P(2)$ este adevărată deoarece pentru $x_1, x_2 > 0$ avem

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow x_1 x_2 \leq \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \Leftrightarrow 0 \leq (x_1 - x_2)^2.$$

Presupunând că, pentru un $n \geq 2$ arbitrar $P(n)$ este adevărată, să demonstrăm valabilitatea lui $P(2n)$. Pentru $x_1, x_2, \dots, x_{2n} > 0$ avem

$$\begin{aligned} \sqrt[2n]{x_1 x_2 \dots x_{2n}} &= \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}} \leq \frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}}}{2} \leq \\ &\leq \frac{\frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n} + \frac{(x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{2n})}{n}}{2} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2n}}{2n}. \end{aligned}$$

S-au folosit pe rând $P(2)$ și $P(n)$. Pentru a avea egalitatea în inegalitatea obținută trebuie verificate condițiile:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}}, \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n, \quad x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_{2n}$$

care înseamnă $x_1 = x_2 = \dots = x_{2n}$.

Fie acum $n \geq 4$ fixat și presupunând că $P(n)$ este adevărată să demonstrăm că $P(n-1)$ este adevărată. Date $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} > 0$, încercăm să alegem un x_n trebuie făcută astfel încât să ne asigurăm de conservarea cazului de egalitate ceea ce înseamnă că va trebui să avem $x_1 = x_2 = \dots = x_n \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1}$. Avem motive să credem că această expresie este simetrică în $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ și cum ea trebuie să colaboreze expresii care apar în inegalitate, alegerile potrivite par a fi fie $x_n = \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \dots x_{n-1}}$ fie $x_n = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})}{n-1}$.

Cu prima alegere avem

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_{n-1} \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \dots x_{n-1}}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \dots x_{n-1}}}{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 \dots + x_{n-1} + \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \dots x_{n-1}}}{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 \dots + x_{n-1}}{n-1}.$$

Egalitate, conform lui $P(n)$, avem când

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1}.$$

Cu aceasta s-a încheiat demonstrația lui $P(n-1)$.

Și cealaltă alegere a lui x_n era bună. Într-adevăr,

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_{n-1} \frac{x_1 + x_2 \dots + x_{n-1}}{n-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 \dots + x_{n-1} + \frac{x_1 + x_2 \dots + x_{n-1}}{n-1}}{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_{n-1} \frac{x_1 + x_2 \dots + x_{n-1}}{n-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 \dots + x_{n-1}}{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 \dots + x_{n-1}}{n-1}$$

și $\sqrt[n-1]{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1}.$

Un caz particular a inegalității mediilor este următorul :

a) Fie n numere pozitive $x_1, x_2, \dots, x_n$, astfel încât $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1, n \in \mathbf{N}^*$. Să se demonstreze că

$$(1.2.14.) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n.$$

b) Folosind inegalitatea de la punctul **a)** să se demonstreze că fiind date n numere pozitive $a_1, a_2, \dots, a_n$ este adevărată inegalitatea:

$$(1.2.15.) \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

c) Utilizând rezultatul de la punctul **b)** să se demonstreze că :

$$(1.2.16.) \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Demonstrație. Egalitatea se realizează pentru $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$. Presupunem cel puțin $x_i \neq x_j$.

a) Etapa I. Verificare.

Este bine ca în etapa de verificare să se pună în evidență modalitățile de trecere de la $P(1)$ la $P(2)$, eventual de la $P(2)$ la $P(3)$, având în vedere că aceste modalități se vor repeta în demonstrarea pasului de la $P(k)$ la $P(k+1)$.

Evidențiem mai jos această observație:

$P(1)$: " $x_1 = 1 \Rightarrow x_1 \geq 1$ " evident adevărată ;

$P(2)$: " $x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 2$ " adevărată întrucât $x_1 + \frac{1}{x_1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{(x_1 - 1)^2}{x_1} \geq 0$ adevărată.

$P(3)$: " $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$ ".

Produsul mai multor numere pozitive fiind egal cu 1 impune ca cel puțin unul să fie subunitar și altul supraunitar. Presupunem $x_i < 1$ și $x_3 > 1$; adică $1 - x_i > 0$ și $x_3 + 1 > 0$. Plecând de la relația de condiție și folosind $P(2)$ se scrie : $x_1 \cdot (x_2 x_3) = 1 \Rightarrow x_1 + (x_2 x_3) \geq 2 \mid + (x_i + x_3)$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + (x_1 x_3) \geq 2 + x_1 + x_3 \text{ sau}$$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 + x_1 + x_3 - x_1 x_3$. Cum $x_1 + x_3 - x_1 x_3 + 2 \geq 3$, deoarece aceasta se mai scrie $(1 - x_1)(x_3 - 1) \geq 0$ conform presupunerii. Din ultimele doua relații, conform tranzitivității inegalităților rezultă $P(3)$ adevărată.

Etapa II. Presupunem $P(k)$ adevărată și demonstrăm prin inducție matematică $P(k+1)$

b) Fie $x_1 = \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}}, \dots, x_n = \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}}$. Deoarece $x_1, x_2, \dots, x_n$, astfel aleși satisfac condiția

punctului a), adică $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n \text{ adică } \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

c) Numerelor $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ li se aplică rezultatul obținut la punctul b). Egalitatea are loc

pentru $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

Pentru inegalitatea Huygens, adică
(1.2.9)

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n} \quad a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n > 0, n \geq 2,$$

alegem

$P(n)$: "pentru orice $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n > 0$,

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n}$$

Inegalitatea verificată cu egal dacă și numai dacă n -uplele $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ și $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ sunt proporționale".

Să demonstrăm că $P(2)$ este adevărată. Pentru $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$ avem

$$\begin{aligned} \sqrt{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)} &\geq \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{b_1 b_2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) &\geq a_1 a_2 + b_1 b_2 + 2\sqrt{a_1 a_2 b_1 b_2} \Leftrightarrow a_1 b_2 + a_2 b_1 \geq 2\sqrt{a_1 a_2 b_1 b_2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 &\geq 4a_1 a_2 b_1 b_2 \Leftrightarrow (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Inegalitatea este deci adevărată și se verifică cu egal pentru (a_1, a_2) și (b_1, b_2) proporționale. Să presupunem în continuare că pentru un $n \geq 2$ fixat $P(n)$ este adevărată și să demonstrăm că $P(2n)$ este adevărată, Pentru $a_1, a_2, \dots, a_{2n}, b_1, b_2, \dots, b_{2n} > 0$ avem

$$\begin{aligned} &\sqrt[2n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_{2n} + b_{2n})} = \\ &= \sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)} \cdot \sqrt[n]{(a_{n+1} + b_{n+1})(a_{n+2} + b_{n+2}) \dots (a_{2n} + b_{2n})} \geq \\ &\geq \sqrt[n]{(\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n})(\sqrt[n]{a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{2n}} + \sqrt[n]{b_{n+1} b_{n+2} \dots b_{2n}})} \geq \\ &\geq \sqrt[n]{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \cdot \sqrt[n]{a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{2n}}} + \sqrt[n]{\sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n} \cdot \sqrt[n]{b_{n+1} b_{n+2} \dots b_{2n}}} = \\ &= \sqrt[2n]{a_1 a_2 \dots a_{2n}} + \sqrt[2n]{b_1 b_2 \dots b_{2n}}. \end{aligned}$$

Am folosit succesiv inegalitățile din $P(n)$ și $P(2)$. Ținând seama de acestea, inegalitatea din $P(2n)$ se verifică cu egal când n -uplele $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ și $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ sunt proporționale, $(a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n})$ și $(b_{n+1}, b_{n+2}, \dots, b_{2n})$ sunt proporționale și simultan $(\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \sqrt[n]{a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{2n}})$ și $(\sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n}, \sqrt[n]{b_{n+1} b_{n+2} \dots b_{2n}})$ sunt proporționale. Se constată ușor că aceasta înseamnă că $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ și $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ sunt proporționale, cu aceasta încheindu-se demonstrația lui $P(2n)$. Să presupunem acum că

$P(n)$ este adevărată, unde $n \geq 4$ este fixat și să demonstrăm că $P(n-1)$ este adevărată. Conform lui $P(n)$, pentru $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, b_2, \dots, b_{n-1} > 0$ avem

$$\begin{aligned} & \sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_{n-1} + b_{n-1})} \left(\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} + \sqrt[n-1]{b_1 b_2 \dots b_{n-1}} \right) \geq \\ & \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_{n-1}} \sqrt[n-1]{b_1 b_2 \dots b_{n-1}} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_{n-1} + b_{n-1})} \left(\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} + \sqrt[n-1]{b_1 b_2 \dots b_{n-1}} \right) \geq \\ & \geq \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} + \sqrt[n-1]{b_1 b_2 \dots b_{n-1}} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \sqrt[n-1]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_{n-1} + b_{n-1})} \geq \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} + \sqrt[n-1]{b_1 b_2 \dots b_{n-1}}. \end{aligned}$$

Această inegalitate este verificată cu egal dacă și numai dacă n -uplele $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}})$ și $(b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, \sqrt[n-1]{b_1 b_2 \dots b_{n-1}})$ sunt proporționale, ceea ce înseamnă $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ și $(b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$ proporționale. Deci $P(n-1)$ este adevărată și atunci, conform principiului de inducție Cauchy, $P(n)$ este adevărată, pentru orice $n \geq 2$.

Fiecare inegalitate din

$$(1.2.11.) \quad \frac{n}{1 + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}} \leq \frac{1}{1 + a_1} + \frac{1}{1 + a_2} + \dots + \frac{1}{1 + a_n} \leq \frac{n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}},$$

$a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, 1), n \geq 2$, se demonstrează cu ușurință, prin reducere, în cazul $n=2$.

Trecerea de la cazul n la cazul $2n$ se face prin

$$\begin{aligned} & \frac{2n}{1 + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}}{2n}} = n \frac{2}{1 + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}}{n}} \leq \\ & \leq \frac{n}{1 + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}} + \frac{n}{1 + \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}}{n}} \leq \\ & \leq \left(\frac{1}{1 + a_1} + \frac{1}{1 + a_2} + \dots + \frac{1}{1 + a_n} \right) + \left(\frac{1}{1 + a_{n+1}} + \frac{1}{1 + a_{n+2}} + \dots + \frac{1}{1 + a_{2n}} \right) = \\ & \frac{1}{1 + a_1} + \frac{1}{1 + a_2} + \dots + \frac{1}{1 + a_n}, \end{aligned}$$

în cazul primei inegalități și prin

$$\begin{aligned} & \frac{2n}{1 + \sqrt[2n]{a_1 a_2 \dots a_{2n}}} = n \frac{2}{1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \cdot \sqrt[n]{a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{2n}}} \geq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_{2n}}} + \frac{n}{1 + \sqrt[n]{a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{2n}}} \geq \\ & \geq \left(\frac{1}{1 + a_1} + \frac{1}{1 + a_2} + \dots + \frac{1}{1 + a_n} \right) + \left(\frac{1}{1 + a_{n+1}} + \frac{1}{1 + a_{n+2}} + \dots + \frac{1}{1 + a_{2n}} \right) = \frac{1}{1 + a_1} + \frac{1}{1 + a_2} + \dots + \frac{1}{1 + a_{2n}}, \end{aligned}$$

în cazul celei de a doua inegalitate. Apoi trecerea de la cazul n la cazul $n-1$ se face alegând $a_n = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})}{n-1}$ în cazul primei inegalități și alegând $a_n = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$ pentru cea de a doua.

Virtuțile inducției Cauchy se pot vedea și din demonstrația inegalității :

$$(1.2.17.) \quad \left(\sum_{i=1}^n a_{1i} a_{2i} \dots a_{mi} \right)^m \leq \left(\sum_{i=1}^n a_{2i}^m \right) \dots \left(\sum_{i=1}^n a_{mi}^m \right),$$

$$a_{hk} \succ 0, \forall h \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad m, n \geq 2$$

Pentru $m=2$ aceasta este inegalitatea Cauchi-Buniakovski-Schwaz aplicata n -uplelor $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$ si $(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$. Să presupunem că inegalitatea este adevarată pentru un $m \geq 2$ arbitrar și să o demonstrăm pentru $2m$. Avem

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n a_{1i} a_{2i} \dots a_{2mi} \right)^{2m} &= \left[\left(\sum_{i=1}^n (a_{1i} a_{2i} \dots a_{mi}) (a_{m+1i} a_{m+2i} \dots a_{2mi}) \right)^2 \right]^m \leq \\ &= \left[\left(\sum_{i=1}^n (a_{1i} a_{2i} \dots a_{mi})^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n (a_{m+1i} a_{m+2i} \dots a_{2mi})^2 \right) \right]^m = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_{1i}^2 a_{2i}^2 \dots a_{mi}^2 \right)^m \left(\sum_{i=1}^n a_{m+1i}^2 a_{m+2i}^2 \dots a_{2mi}^2 \right)^m \leq \\ &\leq \left[\left(\sum_{i=1}^n a_{1i}^{2m} \right) \left(\sum_{i=1}^n a_{2i}^{2m} \right) \dots \left(\sum_{i=1}^n a_{mi}^{2m} \right) \right] \left[\left(\sum_{i=1}^n a_{m+1i}^{2m} \right) \left(\sum_{i=1}^n a_{m+2i}^{2m} \right) \dots \left(\sum_{i=1}^n a_{2mi}^{2m} \right) \right] = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_{1i}^{2m} \right) \left(\sum_{i=1}^n a_{2i}^{2m} \right) \dots \left(\sum_{i=1}^n a_{2mi}^{2m} \right). \end{aligned}$$

Să considerăm că, pentru un $m \geq 4$ inegalitatea este adevărată și să o demonstrăm pentru $m-1$. Alegând $a_{mi} = m^{-1} \sqrt[m]{a_{1i} a_{2i} \dots a_{m-1i}}$ pentru fiecare $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ în inegalitatea din cazul m obținem inegalitatea

$$\left(\sum_{i=1}^n a_{1i} a_{2i} \dots a_{m-1i} m^{-1} \sqrt[m]{a_{1i} a_{2i} \dots a_{m-1i}} \right)^m \leq \left(\sum_{i=1}^n a_{1i}^m \right) \left(\sum_{i=1}^n a_{2i}^m \right) \dots \left(\sum_{i=1}^n a_{m-1i}^m \right) \left(\sum_{i=1}^n (a_{1i} a_{2i} \dots a_{m-1i})^{\frac{m}{m-1}} \right)$$

După simplificări, inegalitatea devine

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_{1i} a_{2i} \dots a_{m-1i})^{\frac{m}{m-1}} \right)^{m-1} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_{1i}^m \right) \left(\sum_{i=1}^n a_{2i}^m \right) \dots \left(\sum_{i=1}^n a_{m-1i}^m \right).$$

E suficient să înlocuim a_{ji} cu $a_{ji}^{\frac{m}{m-1}}$ pentru a obține de aici inegalitatea (1.2.17) în cazul $m-1$.

După o analiză atentă descoperim un singur caz de egalitate pentru (1.2.17) și anume cele în care n -uplele $(a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}), k \in \{1, 2, \dots, m\}$, sunt proportionale.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Alb Lupaș A. (2006), *Combinatorica si teoria grafurilor*, Editura Universității din Oradea,
- [2] Dura T. (1991), *Utilizarea inductiei matematice in rezolvarea unor probleme de geometrie*, Cluj-Napoca
- [3] Tomescu I. (1972), *Introducere in combinatorica*, Editura Tehnică, București

NOȚIUNI DE TEORIA PUNCTULUI CRITIC

Dana KELE, Dana CORBA

Colegiul Național „Onisifor Ghibu” Oradea, profesor de matematică, kele_carmen@yahoo.com

Rezumat: Scopul acestui articol este de a prezenta noțiunea de punct critic într-o manieră cât mai accesibilă. Considerăm că metoda grafică este o metodă de elecție pentru înțelegerea acestor noțiuni, diferențele dintre punct critic degenerat versus nedegenerat fiind evidente în reprezentarea grafică.

Cuvinte cheie: funcție, punct critic

Fie funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = y$. Se numește punct critic al funcției f , punctul $x_0 \in \mathbb{R}$, cu proprietatea că $f'(x_0) = 0$.

Exemplul 1: Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2x^2 - 3x) \cdot e^x$, derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Calculăm $f'(x) =$

$$[(2x^2 - 3x) \cdot e^x]' = (2x^2 - 3x)' \cdot e^x + (2x^2 - 3x) \cdot (e^x)' = (4x - 3) \cdot e^x + (2x^2 - 3x) \cdot e^x = e^x(2x^2 + x - 3), \forall x \in \mathbb{R}.$$

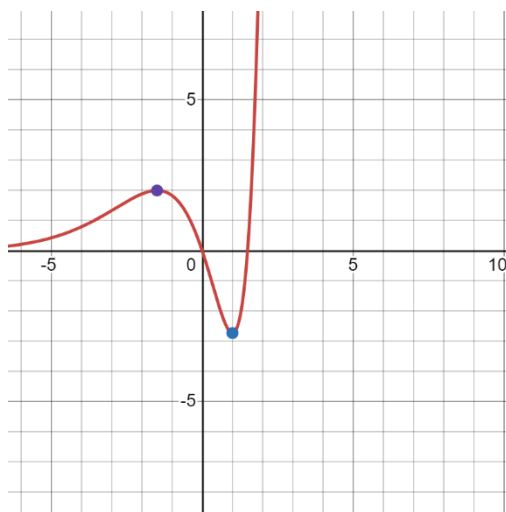
Rezol

vând ecuația: $f'(x) = 0$, $e^x(2x^2 + x - 3) = 0$, $2x^2 + x - 3 = 0$, ($e^x = 0$ ecuație imposibilă)

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{4}, x_1 = 1 \text{ și } x_2 = -\frac{3}{2}$$

Punctele critice ale funcției f sunt $x_1 = 1$ și $x_2 = -\frac{3}{2}$



Grafic 1.

Exemplul 2: Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$, derivabilă pe $(0, \infty)$.

Pentru a determina $f'(x)$ calculăm

$$(\ln f(x))' = (\ln x^x)' = (x \ln x)', \text{ obținem deci } \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^x \cdot (1 + \ln x), \forall x \in (0, \infty)$$

Rezolvând ecuația $f'(x) = 0$ obținem $x = \frac{1}{e} \in (0, \infty)$, punct critic al funcției f .

Exemplul 3: Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 2)(x^2 + 3)$

Calculăm $f'(x) = [\ln(x^2 + 2)(x^2 + 3)]' = \frac{1}{(x^2 + 2)(x^2 + 3)} [2x(x^2 + 3) + 2x(x^2 + 2)]$

$$f'(x) = \frac{4x^3 + 10x}{(x^2 + 2)(x^2 + 3)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f'(x) = 0, x = 0$ punct critic

Exemplul 4: Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} + e^{-3x}$

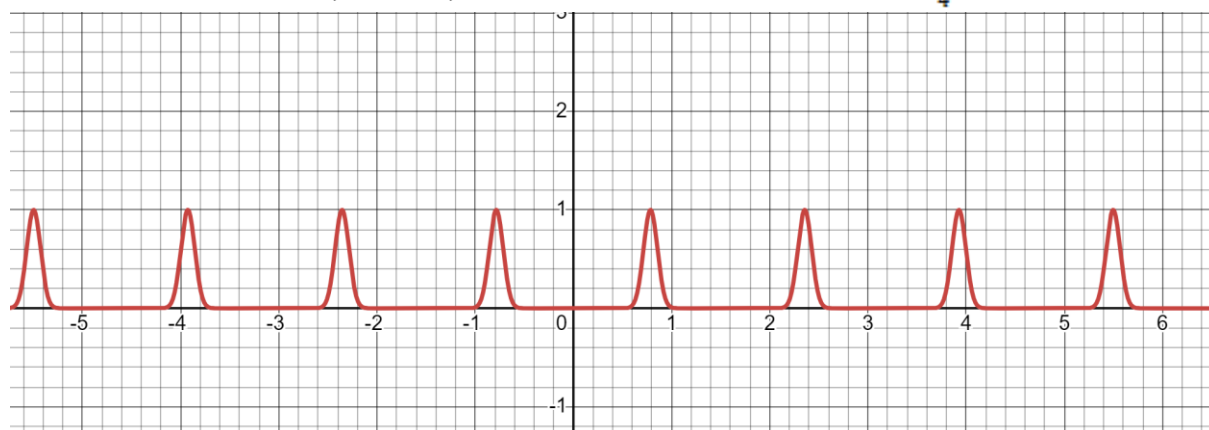
Ecuția $f'(x) = 0$ se scrie $2e^{2x} = 3e^{-3x}$, cu soluția unică $x = \frac{1}{5}(\ln 3 - \ln 2)$ – punct critic al funcției f .

Exemplul 5: $f(x) = \sin^{50} 2x$

Notăm $u(x) = \sin 2x$. Atunci, $f(x) = u^{50}(x)$

Calculăm $f'(x) = 50 \cdot u^{49}(x) \cdot u'(x) = 50 \cdot \sin^{49} 2x \cdot (2 \cos 2x) = 100 \cdot \sin^{49} 2x \cdot \cos 2x$.

Punctele critice sunt soluțiile ecuațiilor $\sin 2x = 0$, $\cos 2x = 0$, deci $x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.



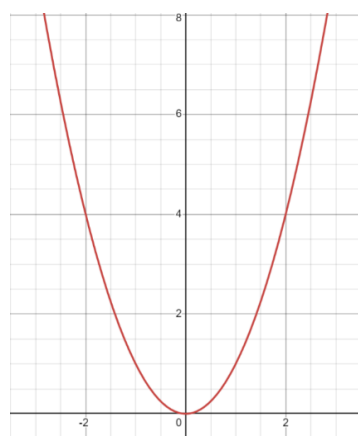
Grafic 2

O clasificare a punctelor critice ar fi următoarea:

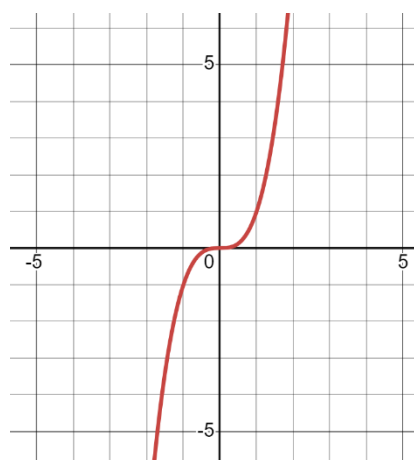
Punctele critice ale unei funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se clasifică astfel:

- dacă $f''(x_0) \neq 0, x_0$ se numește punct critic nedegenerat
- dacă $f''(x_0) = 0, x_0$ se numește punct critic degenerat

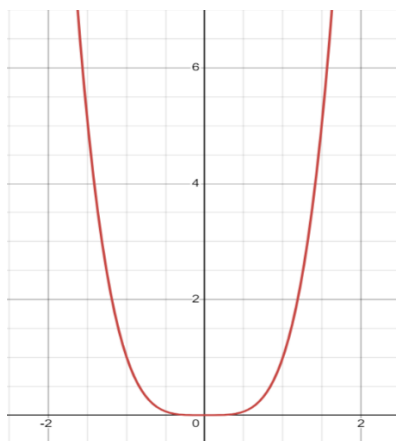
Pentru exemplificare și înțelegere, vom analiza graficul a trei funcții:



$f(x) = x^2$



$f(x) = x^3$



$$f(x) = x^4$$

Grafic 3

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ are punctul critic nedegenerat $x = 0$.

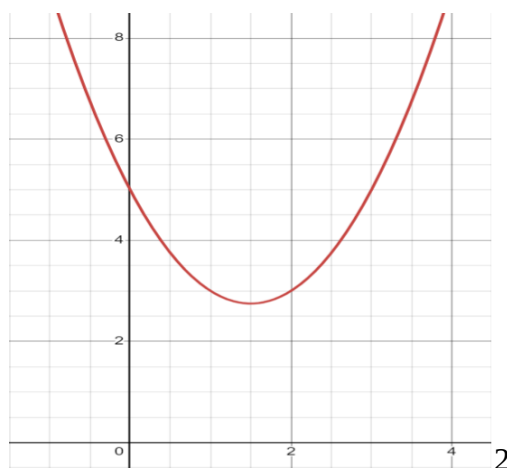
Pentru $n \geq 3$, punctul critic $x = 0$ al unei funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ este degenerat.

Analizând graficul celor trei funcții și mai exact intersecția graficului cu axa absciselor, se observă că în cazul punctelor critice degenerate graficul tinde să se apropie cu un grad mai mare de tangență de axa Ox decât în cazul punctelor critice nedegenerate.

Pentru a exemplifica și mai mult diferența între punctele critice degenerate și nedegenerate, vom analiza următoarele situații.

Din exemplul anterior am observat că funcția pătratică are un punct critic nedegenerat $x = 0$. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 5$; am modificat astfel funcția pătratică adăugând o funcție liniară. Ne punem întrebarea în ce mod acest lucru va modifica punctele critice ale funcției?

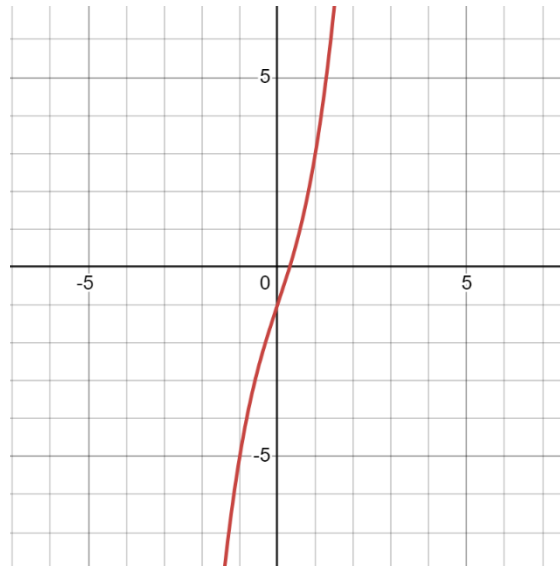
Calculăm $f'(x) = 2x - 3$. Astfel, punctul $x = \frac{3}{2}$ în care derivata se anulează este punctul critic al funcției f . Calculând derivata a doua obținem $f''(x) = 2$. Acest lucru ne indică faptul că punctul $x = \frac{3}{2}$ este un punct critic nedegenerat al funcției f . Concluzionăm astfel că funcția modificată are tot un punct critic nedegenerat.



Grafic 4

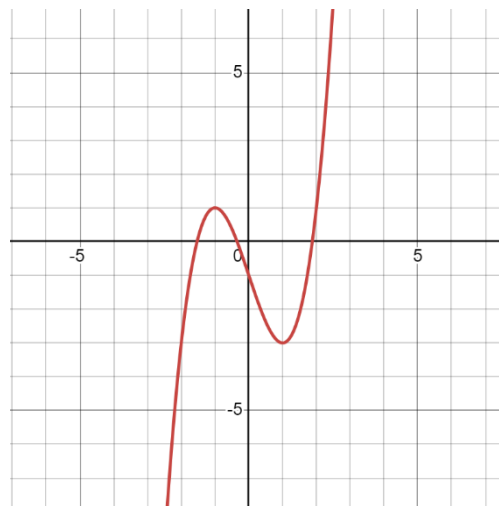
Așa cum am arătat anterior, funcția $f(x) = x^3$ are $x = 0$ punct critic degenerat.

Pentru a observa ce se întâmplă în cazul punctelor critice degenerate, modificăm funcția adăugând o funcție liniară și analizând următoarele cazuri:



$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x - 1$$

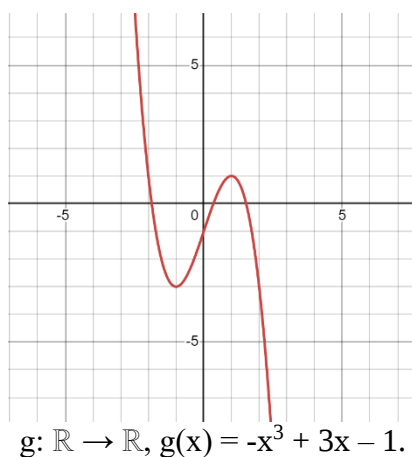
Calculăm $f'(x) = 3x^2 + 3$. Rezolvând ecuația $f'(x) = 0$ observăm că nu avem soluții reale, deci nu avem puncte critice.



$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^3 - 3x - 1$$

Calculăm $h'(x) = 3x^2 - 3$. Rezolvând ecuația $h'(x) = 0$, obținem punctele critice $x_1 = 1$ și $x_2 = -1$.

Calculând derivata a doua obținem că $g''(x) = 6x$ ia valori nenule pentru $x = \pm 1$, deci punctele critice sunt nedegenerate.



Pentru funcția g , coeficientul lui x^3 este negativ. Calculăm $g'(x) = -3x^2 + 3$. Rezolvând ecuația $g'(x) = 0$ obținem punctele critice $x_1 = 1$ și $x_2 = -1$.

Calculând derivata a doua obținem că $g''(x) = -6x$ ia valori nenule pentru $x = \pm 1$, deci punctele critice sunt nedegenerate.

Considerăm că, studiul existenței punctelor critice ale unei funcții reale, determinarea naturii lor, calculul derivatelor este o modalitate simplă și ușor de aplicat de către elevi pentru a găsi minime sau maxime locale, pentru a realiza corect tabelul de variație și reprezentarea geometrică a graficului unei funcții într-un reper cartezian.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Matsumoto. Y. *An Introduction to Morse Theory*, American Mathematical Society, Vol. 208
- [2] Gussi Gh., Stănășilă O., Stoica. T. (1998), *Elemente de analiză matematică*. EDP București
- [3] Ganga M. (1999). *Elemente de analiză matematică*, Ed. Mathpress

EXTREMELE FUNCȚIILOR DE GRADUL AL DOILEA

Gheorghe Marius MOLDOVAN

Colegiul Național „Mihai Eminescu”, Satu Mare moldovanghita@yahoo.com

Rezumat: Problema extremelor în matematica gimnaziului și a liceului nu este un capitol de sine stătător. Ea apare în diferite capitole ale matematicii gimnaziale și liceu. Programele școlare nu mai prevăd lecții de acest gen. Rămâne la latitudinea profesorului să se ocupe de această problemă unde tocmai se poate, atât în gimnaziu cât și la liceu.

Cuvinte cheie: extrem, funcția, maxim, minim

Problema extremelor în matematica gimnaziului și a liceului nu este un capitol de sine stătător. Pare puțin neglijată în ultima vreme, deși este foarte importantă, se poate arăta prin ele elasticitatea gândirii elementare și cu derivata mărimii ce depinde de una sau mai multe variabile.

Începând cu capitolul de „Calcul algebric”, după însușirea formelor de diferență de pătrate, formula binomului se pot introduce probleme de extrem.

Problemele de maxim și minim sunt printre cele mai frumoase și interesante probleme abordate de matematică. O parte din acestea pot fi soluționate elementar.

Extremele funcțiilor de gradul al doilea.

Fie funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită de $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a \neq 0$. Dacă se aduce funcția la forma canonică $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, rezultă că pentru $a > 0$, $f(x) = \left(-\frac{\Delta}{4a}, \infty\right)$ care are cantitatea $-\frac{\Delta}{4a}$ cea mai mică valoare a funcției: $f_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$ pentru $x = -\frac{b}{2a}$, iar pentru $a < 0$ $f(x) = (-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$ din care $-\frac{\Delta}{4a} = f_{\max}$ pentru $x = -\frac{b}{2a}$.

Exemplu:

Să se determine valoarea minimă a expresiei

$$E(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x - 2y + 3 \text{ unde } x, y \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare:

Ordonăm $E(x, y)$; avem:

$$E(x, y) = 3x^2 - 2x(-2 + y) + 2y^2 - 2y + 3, \text{ funcție de gradul al doilea cu}$$

$$a > 0 \Rightarrow E(x, y) > -\frac{\Delta_x}{4a_x}, \text{ în raport în } x.$$

$$\text{Dar } \Delta = 4(y + 2)^2 - 12(2y^2 - 2y + 3) \text{ și}$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4[(y + 2)^2 - 3(2y^2 - 2y + 3)]}{4 \cdot 3} = -\frac{(y + 2)^2 - 3(2y^2 - 2y + 3)}{3} = \frac{5y^2}{3} - \frac{2y}{3} + \frac{5}{3} \text{ funcție de}$$

gradul doi în raport cu y deci

$$\frac{5y^2}{3} - \frac{2y}{3} + \frac{5}{3} \geq -\frac{\Delta_y}{4a_y}$$

$$\Delta y = \frac{4}{9} - 4 \cdot \frac{25}{9} = -\frac{96}{9} = -\frac{32}{3} \text{ și } -\frac{\Delta y}{4a_y} = \frac{\frac{32}{3}}{4 \cdot \frac{5}{3}} = \frac{8}{5}$$

Deci $E(x, y) \geq \frac{8}{5}$ care realizează pentru $x = -\frac{3}{5}, y = \frac{1}{5}, E(x, y)_{\min} = \frac{8}{5}$

Exemplu:

Să se determine valoarea minimă a expresiei:

$$E(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2x - 8y + 4z - 2 \text{ unde } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare:

Uneori valoarea expresiei cu trei variabile este greoaie la fel și tratarea ca trei funcții succesiv în x, y apoi în z.

Rezultat mai rapid se obține scriind expresia E ca sumă de pătrate. Astfel E(x, y, z) va avea forma:

$$E(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-4)^2 + 2(z+1)^2 - 21$$

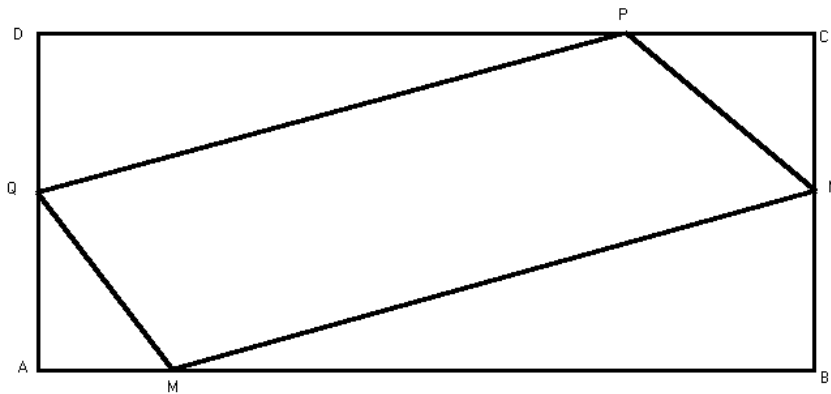
Cum un pătrat perfect este totdeauna pozitiv, va fi $E(x, y, z) \geq -21, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ iar egalitatea se realizează pentru $x=-1, y=4, z=-1$. $E_{\min} = -21$

Exemplu:

Pe laturile dreptunghiului ABCD cu AB=a și BC=b sunt situate punctele M, N, P și Q astfel ca AM=BN=CP=DQ=x.

Să se afle minimul ariei paralelogramului MNPQ când x variază.

Rezolvare:



$$[ABCD] = [AMQ] \cup [BMN] \cup [CNP] \cup [DPQ] \Rightarrow$$

$$A_{MNPQ} = A_{ABCD} - 2A_{AMQ} - 2A_{MBN} = ab - x(b-x) - x(a-x)$$

fiind $x \in [0, c]$ unde $c = \min \{a, b\}$

$$A_{MNPQ} = 2x^2 - (a+b)x + ab$$

Se consideră restricția acestei funcții pe $[a, b]$

$$P(x) = 2x^2 - (a+b)x + ab, \Delta = (a+b)^2 - 8ab = a^2 - 6ab + b^2 \geq 0$$

$$x_{\min} = \frac{a+b}{4}, \min P(x) = p(x_{\min}) = \frac{8ab - (a+b)^2}{8}$$

Iar în capitolul „Funcția de gradul al II-lea” apar extremele funcției de grad II – probleme de extrem.

Exemplu

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + (2m-1)x + m - 2$.

Să se determine $m \in \mathbb{R}$ a.î. $\min f(x) = 4$

$$A = r^0 \Rightarrow f_{\min} = -\frac{4m^2 - 4m + 1 - 4m + 8}{4} = 4 \Leftrightarrow$$

$$4m^2 - 8m + 9 = -16 \quad 4m^2 - 8m + 25 = 0 \Rightarrow m \in \emptyset.$$

Cu ajutorul naturii rădăcinilor ecuației de grad II se pot rezolva probleme de tip: găsește valorile extremelor funcției $y = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$, care se reduc la ecuația

$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$(a_1 - a_2y)x^2 + (b_1 - b_2y)x + c_1 - c_2y = 0$ cu $x, y \in \mathbb{R}$ numai pentru $\Delta \geq 0 \Rightarrow$ rezultă soluții de forma:

- a) $y \in [m, \infty) \Rightarrow m$ este minimul fracției
- b) $y \in (-\infty, M) \Rightarrow M$ este maximul fracției
- c) $y \in [m, M] \Rightarrow m, M$ – extremele (minim, maxim) ale funcției și alte probleme de extrem.

Alte Exemple:

1.) Din mulțimea triunghiurilor cu perimetrul $2p$ să se determine cel de arie maximă.

Aria triunghiului este dată de formula lui Heron

$A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$, $p = \frac{x+y+z}{2}$ unde p semiperimetru și x, y, z sunt lungimile laturilor triunghiului.

Funcția $A: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ este o funcție strict crescătoare, iar p este o constantă, maximul ariei se va obține simultan cu cel al produsului $(p-x)(p-y)(p-z)$ ai cărui factori au suma $(p-x) + (p-y) + (p-z) = 3p - (x+y+z) = 3p - 2p = p$ deci constantă.

Atunci maximul ariei se va obține pentru factorii egali

$$p-x = p-y = p-z, \text{ adică } x = y = z = \frac{2p}{3} \text{ și } A_{\max} = \frac{p^2\sqrt{3}}{9} \text{ fiind triunghiul echilateral.}$$

2.) Dintr-o foaie dreptunghiulară de tablă de arie $A=192 \text{ cm}^2$ să se confecționeze un rezervor paralelipipedic fără capac, de volum maxim.

Rezolvare:

Dacă dimensiunile bazei rezervorului sunt x și y iar z înălțimea, și notăm cu V volumul, vom avea: $xy + 2(yz + xz) = 192$ iar $V(x, y, z) = xyz$

Produsul termenilor sumei din primul membru al ariei va fi: $(xy)(2yz)(2xz) = 4x^2y^2z^2 = 4V^2$ care își atinge maximul simultan cu V . Conform teoremei

demonstrate maximul se obține pentru $xy=2yz=2xz$ de unde $x=y=2z$ care înlocuită în arie vom avea $3xy=192$ sau $3x^2 = 192, x^2 = 64, x = y = 8, z = 4$.

$$V_{\max} = 256\text{cm}^3$$

3) Să se determine maximul funcției:

$$f(x) = (3x - 1)(4 - 2x)(1 - x), f: \left(\frac{1}{3}, 1\right) \rightarrow \mathbb{R}$$

Rezolvare:

Funcția $f(x)$ este produsul a trei factori pozitivi cu suma constantă $(3x-1)+(4-2x)+(1-x)=4$ constantă.

Pe de altă parte $3x-1=4-2x=1-x$ este incompatibil.

Pentru găsirea soluțiilor se procedează astfel:

Se înmulțește funcția $f(x)$ cu λ, μ aranjându-le convenabil
 $\lambda\mu f(x) = (3\lambda x - \lambda)(4\mu - 2\mu x)(1 - x)$ și suma expresiilor din cele trei paranteze:
 $(3\lambda - 2\mu - 1)x + 4\mu - \lambda + 1 = 0$ este constantă numai dacă $3\lambda - 2\mu - 1 = 0$, atunci din
 $\lambda(3x - 1) = \mu(4 - 2x) = 1 - x, \lambda = \frac{1-x}{3x-1}, \mu = \frac{1-x}{2(2-x)}$ care se înlocuiesc în $3\lambda - 2\mu - 1 = 0$ se

obține ecuația de gradul al doilea $9x^2 - 20x + 9 = 0$ cu soluție acceptabilă

$$x_1 = \frac{10 - \sqrt{19}}{9}. \text{ Acesta este punctul de maxim global al lui } f \text{ și } \max f = f\left(\frac{10 - \sqrt{19}}{9}\right) \approx 4,43.$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] Megan M. (1999), *Analiza matematică*, Ed. Miron, Vol. I-II
- [2] Nicolescu M., Dinculeanu M., Maraus S. (1971). *Analiza matematică*, Ed. Didactică
- [3] Andrica D., Purdea I., Ursu S., Duca D., Agratini O., Lobonț Gh. (2001), *Manual pentru clasa a XI-a*, Ed. Gil, Zalău
- [4] Stănășilă O. (1989), *Analiza matematică*, EDP București
- [5] Sfichi R. (1990), *Probleme de limită și extrem în fizică*, EDP București

VALENȚE FORMATIVE ALE ACTIVITĂȚII DE REZOLVARE A PROBLEMELOR

Iuliana MOLDOVAN

Școala Gimnazială „Grigore Moisil” Satu Mare, jud. Satu Mare, iu_moldovan@yahoo.fr

Rezumat: *Efortul pe care îl face elevul în rezolvarea conștientă a unei probleme presupune o mare mobilizare a proceselor psihice cognitive, volitive și motivațional-afective. Dintre cele cognitive, cea mai solicitată și antrenată este gândirea, prin operațiile logice de analiză, sinteză, comparație, abstractizare și generalizare.*

Cuvinte cheie: *comparare, analiză, sinteză, abstractizare, generalizare*

„Cea mai înaltă formă a gândirii pure există în matematică.”

Platon

Activitatea de rezolvare de probleme are bogate valențe formative în personalitatea elevilor. În cadrul ei, aceștia își valorifică cunoștințele matematice și sunt puși în situația de a descoperi ei însuși modalități de rezolvare, de a descoperi soluția, de a formula ipoteze și apoi de a le verifica, de a face asociații de idei și corelații inedite. Deci rezolvarea problemelor pune la încercare în cel mai înalt grad capacitățile intelectuale ale elevilor, le solicită acestora toate disponibilitățile psihice, în special inteligența, motiv pentru care și în ciclul primar programa de matematică acordă problemelor o foarte mare atenție.

Prin rezolvarea problemelor de matematică elevii își formează deprinderi eficiente de muncă intelectuală, care se vor reflecta pozitiv și în studiul altor discipline de învățământ. În același timp, activitățile matematice de rezolvare și compunere de probleme contribuie la îmbogățirea orizontului de cultură generală al elevului prin utilizarea în conținutul problemelor a unor cunoștințe pe care nu le studiază la alte discipline de învățământ. Este cazul informațiilor legate de distanță, viteză, timp, preț de cost, plan de producție, normă de producție, cantitate, dimensiune, greutate, arie, durata unui fenomen etc.

Problemele de aritmetică, fiind strâns legate prin însuși enunțul lor de viață, de practică, dar și de rezolvarea lor, generează la elevi un simț al realității de tip matematic, formându-le deprinderea de a rezolva și alte probleme practice pe care viața le pune în fațalor. Rezolvarea sistematică a problemelor de orice tip sau gen are drept efect formarea la elevi a unor seturi de priceperi, deprinderi și atitudini pozitive care le dau posibilitatea de a rezolva în mod independent probleme, de a compune ei înșiși probleme.

Prin conținutul lor, prin tehnicile de abordare și soluționare utilizate, rezolvarea problemelor de matematică conduce la formarea și educarea unei noi atitudini față de muncă, a spiritului de disciplină conștientă, dar și a spiritului emulativ, a competiției cu sine însuși și cu alții. Nu putem omite nici efectele benefice pe planul valorilor autoeducative, al conduitei rezolutive.

Introducerea elevilor în activitatea de rezolvare a problemelor se face progresiv, antrenându-i în depunerea de eforturi mărite pe măsură ce înaintează în studiu și pe măsură ce experiența lor rezolutivă se îmbogățește. Astfel, odată cu învățarea primelor operații aritmetice (de adunare și scădere) se începe rezolvarea pe cale orală și pe bază de intuiție, a primelor probleme simple. Treptat, elevii ajung să rezolve aceste probleme și în formă scrisă. Un moment de salt îl constituie trecerea de la rezolvarea problemelor simple la rezolvarea problemelor compuse. Varietatea problemelor pe care le rezolvă elevii sporește efortul mental și eficiența formativă a activității de rezolvare a problemelor. Trebuie să delimităm însă două situații în rezolvarea problemelor, situații care solicită în mod diferit mecanismele intelectuale ale elevilor:

a) Când elevul are de rezolvat o problemă asemănătoare cu cele rezolvate anterior sau o problemă-tip (care se rezolvă prin aceeași metodă, comună tuturor problemelor de tipul respectiv). În acest caz elevul este solicitat să recunoască tipul de problemă căruia îi aparține problema dată. Prin rezolvarea unor probleme care se încadrează în aceeași categorie, având același mod de organizare a judecăților, același raționament, în mintea elevilor se fixează principiul de rezolvare a problemei, schema mentală de rezolvare. În cazul problemelor tipice, această schemă se fixează ca un algoritm de calcul, algoritmul de rezolvare a problemei.

b) În cazul când elevul întâlnește probleme noi, necunoscute, unde nu mai poate aplica o

schemă mentală cunoscută, gândirea sa este solicitată în găsirea căii de rezolvare. Experiența și cunoștințele de rezolvare, deși prezente, nu mai sunt orientate și mobilizate spre determinarea categoriei de probleme și spre aplicarea algoritmului de rezolvare. Elevul trebuie ca, pe baza datelor și a condiției problemei, să descopere drumul spre aflarea necunoscutei. În felul acesta realizează un act de creație, care constă în restructurarea datelor proprii sale experiențe și care este favorizat de nivelul flexibilității gândirii sale, de capacitatea sa combinatorică și anticipativă. În rezolvarea unei probleme, lucrul cel mai important este construirea raționamentului de rezolvare, adică a celui șir de judecăți orientate către descoperirea necunoscutei.

Rezolvarea oricărei probleme trece prin mai multe etape. În fiecare dintre aceste etape, datele problemei apar în combinații noi, reorganizarea lor la diferite nivele ducând către soluția problemei. Este vorba de un permanent proces de analiză și sinteză (prin care elevul separă și reconstituie, desprinde și construiește raționamentul care conduce la soluția problemei), de o îmbinare aparte a analizei cu sinteza, caracterizată prin aceea că diferitele elemente luate în considerație își dezvăluie mereu noi aspecte (analiza) în funcție de combinațiile în care sunt plasate (sinteza).

Procesul de rezolvare a unei probleme presupune deducerea și formularea unor ipoteze și verificarea lor. Dar formularea acestor ipoteze nu este rezultatul unei simple inspirații, ci presupune atât un fond de cunoștințe pe care elevul le aplică în rezolvarea problemelor, cât și o gamă variată de deprinderi și abilități intelectuale necesare în procesul rezolvării problemelor. Diferitele ipoteze (enunțuri ipotetice care ne vin în minte în legătură cu problema pusă) nu apar la întâmplare. Ele iau naștere pe baza asociațiilor, pe baza cunoștințelor asimilate anterior. Cu cât cunoștințele sunt mai profunde, cu atât șansele ca ipotezele care se nasc în mintea rezolvitorului îl conduc mai repede la o soluție, cu cât fondul din care sunt alese ipotezele este mai bogat cu atât soluția este mai bună. De aceea, în orice domeniu, capacitatea de a rezolva probleme complexe este condiționată de o solidă pregătire de specialitate, dar și de cultura generală.

În rezolvarea problemelor intervin o serie de tehnici, procedee, moduri de acțiune, deprinderi și abilități de muncă intelectuală independentă. Astfel sunt necesare unele deprinderi și abilități cu caracter mai general cum sunt: orientarea activității mintale asupra datelor problemei, punerea în legătură logică a datelor, capacitatea de a izola ceea ce este cunoscut de ceea ce este necunoscut, extragerea acelor cunoștințe care ar putea servi la rezolvarea problemei precum și unele deprinderi specifice referitoare la detaliile acțiunii (cumsunt cele de genul deprinderilor de calcul).

Cu toată varietatea lor, problemele de matematică nu sunt independente, izolate, ci fiecare problemă se încadrează într-o anumită categorie. Prin rezolvarea unor probleme care se încadrează în aceeași categorie, având același mod de organizare a judecăților, deci același raționament, în mintea copiilor se conturează schema de rezolvare, ce se fixează ca un algoritm sau un semialgoritm de lucru, care se învață, se transferă și se aplică la fel ca regulile de calcul. Aflarea căii de rezolvare a unei probleme este mult mai ușurată în cazul în care elevul poate subsuma problema nouă unei categorii, unui tip determinat de probleme, deja cunoscute. Dar această subsumare se poate face corect numai dacă elevul a înțeles particularitățile tipice ale categoriei respective, raționamentul rezolvării ei, dacă o poate descoperi și recunoaște în orice condiții concrete s-ar prezenta problema (domeniul la care se referă, mărimea și natura datelor etc.).

De o mare importanță în rezolvarea problemelor este înțelegerea structurii problemei și a logicii rezolvării ei.

Elevul trebuie să cuprindă în sfera gândirii sale întregul „film” al desfășurării raționamentului și să-l rețină drept element esențial, pe care apoi să-l generalizeze la întreaga categorie de probleme. Pentru a ajunge la generalizarea raționamentului comun al unei categorii de probleme, elevii trebuie să aibă formate capacitățile de a analiza și de a înțelege datele problemei, de a sesiza condiția problemei și de a orienta logic șirul de judecăți către întrebarea problemei.

Când se rezolvă o problemă compusă, aparent elevul rezolvă pe rând mai multe probleme simple. În esență, nu este vorba de probleme simple care se rezolvă izolat. Acestea fac parte din structura problemei compuse, rezolvarea fiecăreia dintre ele făcându-se în direcția aflării necunoscutei, fiecare problemă simplă rezolvată reprezentând un pas înainte, o verigă pe calea raționamentului problemei compuse, de natură să reducă treptat numărul datelor necunoscute.

Locul și rolul problemelor în dezvoltarea gândirii logice și creative

Rezolvarea problemelor are un rol educativ, prin contribuția valoroasă pe care o aduce la dezvoltarea facultăților mintale, cu deosebire la dezvoltarea judecății antrenând în cea mai mare măsură operațiile logice de analiză și sinteză, de comparație, abstractizare și generalizare.

Activitatea gândirii se manifestă în mod esențial în rezolvarea de probleme, prin mijlocirea cunoștințelor atunci când în calea activității practice sau teoretice apare un obstacol, iar dacă acest obstacol nu există, dacă scopul poate fi atins pe baza deprinderilor formate anterior și a unor rezolvări existente de-a gata în experiența câștigată, atunci gândirea nu va fi confruntată cu o problemă nouă, deci nu va exista o problemă de rezolvat.

O problemă este cu atât mai dificilă, cu cât diferă mai mult de acelea pe care le-am rezolvat anterior și deci cu cât situația nouă cere o restructurare mai adâncă a experienței trecute.

Caracterul abstract al gândirii de cunoaștere senzorială și de activitate practică, se realizează de către învățător începând din clasa I. Deci pentru a fi înțeleși de elevii mici în ceea ce explicam, iar ei să poată gândi și asimila, trebuie să folosim material didactic, care înfățișează obiecte, fenomene, animale, flori, păsări.

Se poate spune deci, că intenția reprezintă primul pas pe calea care duce la cunoașterea lumii reale, la sesizarea proprietăților interioare ale lucrurilor, la stabilirea pe baza unor procese de gândire a legilor științifice. Datorită intuiției se formează mai repede și mai clar, reprezentările și noțiunile despre obiecte, fapte și fenomene, sunt sesizate mai bine legăturile și dependența dintre ele. Dar elevul mic trebuie să ajungă la stadiul acela care permite ca pe baza reprezentărilor spațiale și a gândirii să rezolve probleme ce se pun fără ajutorul materialului intuitiv.

Se pot face următoarele precizări:

- Lipsa materialului intuitiv frânează însușirea cunoștințelor, procesul de formare a reprezentărilor spațiale;

- Abuzul materialului intuitiv frânează formarea și dezvoltarea gândirii abstracte, îngreunează procesul de abstractizare și generalizare. Cu alte cuvinte există două extreme de care trebuie să ne ferim: ignorarea intuiției și exagerarea folosirii.

La început mulți copii se desprind greu de obiectele concrete în procesul gândirii. Se observă că ei nu pot socoti dacă nu au la îndemână material didactic și recurg frecvent la socotitul pe degete, ceea ce demonstrează că gândirea școlarului de vârstă mică mai păstrează în mare măsură un caracter intuitiv:

Educarea gândirii ca orice fenomen educațional este mediata de particularitățile psihice ale copiilor;

J. Piaget menționează că "în societatea contemporană însăși condiția de existență a omului se concentrează tot mai mult către inteligență și creativitate, adică inteligența activă".

A rezolva o problemă de matematică înseamnă ca din datele cunoscute să deducem necunoscuta care se află în relații neexprimate în textul problemei și care trebuie descoperit.

Practic în raționamentul problemei intervine raționamentul matematic; care va fi cu atât mai complex și mai riguros cu cât necunoscuta se găsește în relații mai îndepărtate, mai mascate de datele cunoscute ale problemei. Procesul rezolvării unei probleme se prezintă ca o activitate mintală în căutare, în cursul căreia în baza datelor problemei sunt emise diferite ipoteze care sunt supuse verificării pe rând.

Seleționarea și ordonarea problemelor după gradul de dificultate pe care îl ridică în rezolvare îi ajută pe copii să parcurgă drumul ascendent al formării capacităților necesare rezolvării problemelor printr-un efort gradat, printr-un antrenament permanent.

Raționamentul de rezolvare a problemei se poate generaliza la niveluri diferite și cu cât nivelul de generalizare este mai înalt, cu atât principiul de rezolvare este mai cuprinzător și se aplică la un număr mai mare de probleme. Pentru a forma la elevi o gândire creatoare trebuie puși în situații diferite, mereu noi. În acest scop se utilizează o varietate de procedee:

- Dezvoltarea și complicarea treptată a unei probleme rezolvate;
- Rezolvarea problemei prin mai multe procedee și alegerea căii cele mai economice, reformarea problemei prin introducerea necunoscutei drept cunoscută și altele.

Rezolvarea problemelor exercită o influență formativă asupra elevilor pe tot parcursul studierii matematicii.

Cu cât înaintăm către clasele mai mari, cu atât mai mult acestea se referă la formarea unei gândiri profunde și perspicace, a exactității și corectitudinii, a spiritului de inițiativă și independență.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Birgean S., Nicoară C., Calinin A. (2007). *În țara matematicii! – exerciții și probleme pe nivele de dificultate*, Editura „Paralela 45”, Pitești
- [2] Dăcilă E., Dăcilă I. (2008). *Matematica – Ghidul învățătorului, ediție revăzută și completată*, Editura „Iulian”, București
- [3] Călugărița A. (2006), *Exerciții și probleme de matematică pentru elevii claselor I- IV*, Editura Universal Pan, București

EDUCAȚIA ȘI PROVOCĂRILE LUMII CONTEMPORANE. ROLUL EDUCAȚIEI ÎN CONTEXTUL ACTUAL

Daniela MORARU

Școala Gimnazială nr.1, Berceni, jud. Ilfov, profesor de matematică, morarudana19@yahoo.com

Rezumat: Rolul și formele educației în societate, selectarea și transmiterea valorilor de la societate la individ, transmiterea și asimilarea unui volum de valori științifice și umaniste.

Cuvinte cheie: educație, valori, formare.

ROLUL ȘI FORMELE EDUCAȚIEI ÎN SOCIETATE

Educația, etimologic provine de la "educatio" - creștere, formare; dar își are originea și în "educare" - a crește a forma, a instrui; respectiv "educare-educere" - a ridica, a înălța. Educația însumează acțiunile - deliberate sau nedeliberate, explicite sau implicite, sistematice sau nesistematice - de modelare și formare a omului din perspectiva unor finalități racordate la reperele socio - economico - istorico - culturale ale arealului în care se desfășoară.

Din perspectivă sociologică definim educația, ca „ansamblu de acțiuni sociale de transmitere a culturii, de generare, organizare și conducere a învățării individuale și colective”, care include în sfera sa atât instruirea tinerei generații în instituții cu scop educativ, cât și influențele educaționale ale diferitelor contexte sociale. Educația este activitatea complexă realizată în cooperare de educator și educabil în vederea formării și autoformării asistate, cu scopul dezvoltării personalității și sădării unei mentalități pozitiv-constructive. Educația, are drept scop esențial scoaterea ființei umane din starea primară, biologică și ridicarea ei spre starea spirituală, culturalizată. Educația indică nivelul de instrucție, de cultură, de conturare a diferitelor componente ale personalității în urma influențelor educaționale. Educația privită ca rezultat implică o judecată de valoare referitoare atât la calitatea educației, cât și la individului.

Vorbind despre funcțiile educației, precizăm că una dintre ele se referă la selectarea și transmiterea valorilor de la societate la individ. Se realizează, în acest fel, un proces de adaptare a acestuia la mediu, constituit din totalitatea valorilor sociale elaborate și incorporate în cultura și civilizație. Este acea componentă a educației prin care se urmărește transmiterea și asimilarea unui volum de valori științifice și umaniste, selectat din patrimoniul cultural al omenirii, prelucrat și sintetizat în concordanță cu stadiul dezvoltării psihice a copilului, concomitent cu formarea calităților și capacităților intelectuale.

Educația intelectuală: contribuie la pregătirea generală și fundamentală a individului, asigurându-i pe lângă orizontul general de cultura și capacitățile intelectuale necesare oricărei dezvoltări și activități. Prin conținutul și obiectivele urmărite, educația intelectuală asigură nucleul valoric al personalității și un nivel al dezvoltării intelectuale, indispensabile realizării celorlalte laturi ale educației.

Educația morală : Este o latură a educației care ca scop formarea profilului moral al personalității și al comportamentului socio-moral al individului.

Educația non-formală a fost definită de către J. Kleis, drept “orice activitate educațională, intenționată și sistematică, desfășurată de obicei în afara școlii tradiționale, al cărei conținut este adaptat nevoilor individului și situațiilor speciale, în scopul maximalizării învățării și cunoașterii și al minimalizării problemelor cu care se confruntă acesta în sistemul formal, stresul notării în catalog, disciplina impusă, efectuarea temelor etc.”

Educația informală se referă la experiențele zilnice ce nu sunt planificate sau organizate și conduc către o învățare informală. Când aceste ”experiențe sunt interpretate de către cei mai în vârstă sau de către membrii comunității ele se constituie în educație informală.”

Educația informală este procesul care se întinde pe toată durata vieții, prin care individul dobândește informații, își formează priceperi și deprinderi, își structurează convingerile și atitudinile, se dezvoltă, prin intermediul experiențelor cotidiene.

Educația formală: cuprinde totalitatea activităților și a acțiunilor pedagogice desfășurate și proiectate instituțional, în grădinițe, școli, licee, universități, centre de perfecționare etc, în cadrul sistemului de învățământ, în mod planificat și organizat pe niveluri și ani de studii, având finalități educative bine determinate. Ea se realizează în cadrul unui proces de instruire realizat cu rigurozitate, în timp și spațiu: planuri, programe, manuale, cursuri, materiale de învățare.

În condițiile unei evoluții rapide a societății și implicit a educației și cunoașterii, multe dintre cunoștințele și practicile valabile astăzi vor fi mâine depășite, învechite. Este de așteptat ca într-o perioadă marcată de atâtea mutații tehnologice și de apariția unor noi forme de organizare a educației și a muncii, competențele specifice să devină și ele rapid depășite. Nevoia de reactualizare, de educație și învățare continuă vor fi în creștere. Dar ceea ce este mai important este faptul că nevoile de cunoaștere și de acțiune ale societății și ale membrilor ei vor fi altele decât cele de până acum.

Educația poate fi înțeleasă în sens restrâns sau în sens larg.

Educația în sens restrâns se referă la educația formală (în grădinițe, școli, licee, facultăți) Educația în sens larg :

1. educația părinților – primul tip de educație de care are parte copilul
2. educație din partea familiei largite (alte rude, prieteni de familie, cunoscuți, vecini, colegi de-ai părinților, nași etc)
3. educație din experiența de viață – tot ce se întâmplă în jurul copilului reprezintă o formă de educație pentru el (aici intră: educația străzii – tot ce vede, aude, trăiește individul pe stradă, educație din relațiile cu diferite entități publice și private, educație din relația cu statul (politic și administrativ)
4. educație din anturaj (copii din fața blocului, colegi de grădiniță, școală, liceu, facultate, prieteni, cunoscuți etc)
5. educația formală (creșă, grădiniță, școală, liceu, facultate, și orice alte cursuri, seminarii, întâlniri cu scopul concret de a învăța ceva)
6. autoeducație (/autoeducare) – foarte importantă, bazată pe cele anterioare, este educația care dezvoltă și îmbunătățește toate învățăturile primite anterior, care trage concluzii în urma informațiilor știute și experiențelor trăite, și creează noi informații utile.

Educația indivizilor poate fi proastă, sau bună (corectă). O educație proastă se observă atunci când comportamentele individului mai mult dăunează societății în care individul trăiește, iar educația bună/corectă se vede atunci când individul aduce mai multe beneficii societății decât daune.

Educația formală obligatorie (școală generală, liceu) ar trebui să cuprindă obligatoriu trei componente majore:

1. Educație pentru o cultură generală de bază/esențială (școala primară)
2. Educație cu accent pe ANUMITE domenii (detalii) (liceu)
3. Educație cu accent pe TOATE CELELALTE DOMENII relevante și foarte importante pentru om.

Educația are rolul de a modela societatea prin intermediul formării corespunzătoare a membrilor săi. Ne referim în acest context atât la dimensiunea formală a sporirii accentului pus pe educația pentru democrație și pe educația interculturală cât și la dimensiunea informală a dezvoltării toleranței individuale și a sentimentelor de respect reciproc, a capacității de înțelegere a faptului că acceptarea diversității reprezintă, în ultima instanță, condiția fundamentală a libertății personale. Relativ la nivelul pozitiv al libertății, la asigurarea posibilităților instrumentale de realizare de către indivizi a scopurilor și obiectivelor asumate, educației îi revin sarcini complexe și variate. Avem în vedere, în primul rând, faptul că una dintre coordonatele primordiale ale libertății este cunoașterea, cunoscut

fiind faptul ca (cf. Cucoș, C., 1996, p.22) "istoria umanității poate fi lecturată și ca istorie a pedagogilor ascunderii, disimulării și interzicerii, inegalitățile provenind din distribuția preferențială a ideilor".

Este necesar ca demersurile anterior menționate să fie dublate la nivelul realității educaționale de tip școlar de o serie de acțiuni instructiv-formative destinate încurajării permanente a libertății de gândire, acțiune și exprimare a celor care se educa. Elevii vor fi astfel stimulați să emită opinii personale, să-și dezvolte gândirea divergentă și spiritul critic, să genereze controverse de idei și să-și argumenteze punctele de vedere. În acest sens, profesorul va iniția activități care să favorizeze atât asumarea liberă de către elevi a unor finalități acționale personale cât și întreprinderea unor demersuri concrete de atingere a acestora, demersuri aflate la latitudinea elevilor în cauză. Asigurarea unui climat educațional adecvat încurajării libertății de acțiune și gândire a elevilor presupune încurajarea inițiativelor personale ale acestora, existența unei ambianțe școlare flexibile și instituirea între profesor și clasă a unor relații bazate pe cooperare și nu pe dominare sau vasalitate autocratică, pe autoritate și nu pe exercitarea discreționară a puterii. Importanța implicării active a educației în raport cu problematica libertății umane este cu atât mai evidentă cu cât, așa după cum preciza Finkelkraut (cf. Cucos, C., 1996, p. 86), în prezent omul a devenit un conglomerat de nevoi pasagere, uitând că libertatea este altceva decât puterea de a schimba o determinare iar cultura este ceva mai mult decât o pulsione care trebuie satisfăcută.

BIBLIOGRAFIE

- [1] <http://www.passionineducation.com/types-of-education-formal-informal-non-formal/>
- [2] Cucoș C. (2002), *Pedagogie*, Editura Polirom, Iași
- [3] Crețu D. (1999), *Psihopedagogie, Elemente de formare a profesorilor*, Editura Imago, Sibiu
- [4] Jinga I., Istrate E. (2006), *Manual de pedagogie*, Editura All, București
- [5] Barna, A. (1995), *Fundamentele culturale ale educației*, Iași Ed. Polirom
- [6] Bocoș, M. (2003), *Autoeducația – Probleme teoretice și metodologice*, București, E.D. P.
- [7] Ciolan, L., (1999), *Provocările pedagogiei contemporane*, Cluj-Napoca, Ed. Presa Universitară Clujeană
- [8] Cristea, S. (1996-1997), *Teoria curriculumului și conținuturile educației*, Iași, Ed. Univ. Al. Ioan Cuza
- [9] Cristea, S., (1994), *Pedagogie*, Vol I, II, Pitești, Ed. Hardiscom
- [10] Crișan, A. (1998), *Fundamente pedagogice ale reformei învățământului*, București, E.D.P.
- [11] Cucoș, C. (1997), *Pedagogie și axiologie*, București, E.D.P.
- [12] Cucoș, C. etc. (1998), *Pedagogie*, Iași, Ed. Polirom
- [13] Dewey, J. (1992), *Fundamentele educației permanente*, București, E.D.P.
- [14] Dewey, J. (1997), *Fundamente pentru o știință a educației*, București, E.D.P.
- [15] Ionescu, M., Chiș, V. (2001), *Educația și dinamica ei*, București, Ed. Tribuna Învățământului

DRUMURI DE VALOARE OPTIMĂ. APLICAȚII

Marta Ghizela NAGY

Studentă an III Matematică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea, nagy.martika@yahoo.com

Rezumat: În matematica aplicată și informatică, studiul grafurilor joacă un rol crucial în modelarea și soluționarea problemelor complexe din diverse domenii, de la rețele de telecomunicații la planificarea traseelor și optimizarea logistică. Lucrarea de față se concentrează pe identificarea și analiza drumurilor de valoare optimă în cadrul grafurilor, o temă de mare importanță pentru optimizarea resurselor și eficientizarea proceselor.

Cuvinte cheie: algoritm, drum de valoare optimă

INTRODUCERE

Algoritmii studiați, în cadrul prezentei lucrări, cum ar fi Ford și Bellman-Kalabaf, oferă soluții robuste pentru provocările întâmpinate în rețele complexe, demonstrând flexibilitatea și eficacitatea lor în scenarii variate, de la navigația GPS la optimizarea rețelelor de comunicații. Deși fiecare algoritm are limitările sale, adaptabilitatea lor în fața diverselor tipuri de grafuri și probleme specifice ilustrează utilitatea continuă în domeniul informaticii și ingineriei.

Prin explorarea metodelor diverse de reprezentare a grafurilor și algoritmilor specifici pentru determinarea acestor drumuri, lucrarea contribuie la înțelegerea profundă a modului în care grafurile pot fi utilizate pentru a optimiza diverse procese în contexte aplicative.

Această lucrare deschide calea către explorarea ulterioară a noilor algoritmi și metode de optimizare, sugerând că cercetarea în acest domeniu este vitală pentru avansarea tehnologică. De asemenea, integrarea tehnicilor de inteligență artificială și învățare automată ar putea oferi îmbunătățiri semnificative în eficiența și acuratețea găsirii drumurilor de valoare optimă.

1. Algoritmii lui Ford

Se aplică la toate grafurile valorizate care nu conțin un circuit absorbant. El permite determinarea drumului de valoare minimă între două vârfuri x_0 la x_i . În plus, pentru fiecare arc $(x_i, x_j) \in \Gamma$ există una din posibilitățile următoare:

$$\lambda_j - \lambda_i < v(x_i, x_j), \quad \lambda_j - \lambda_i = v(x_i, x_j), \quad \lambda_j - \lambda_i > v(x_i, x_j).$$

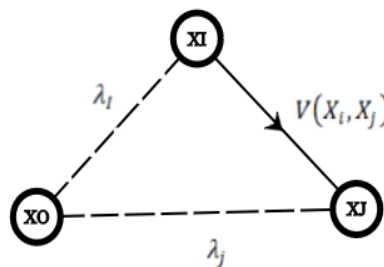


Fig. 1

Deoarece se urmărește determinarea drumului de valoare minimă între x_0 și x_j , se va lua în considerare de acum înainte drumul care trece prin x_i de valoare $\lambda_j^{(1)} = \lambda_i + v(x_i, x_j) < \lambda_j$. Pe baza celor de mai sus avem:

Pasul 1: Atașăm vârfului $x_i \in X, i = \overline{1, n}$, valoare

$$\lambda_i = v(u), u = [x_0 * x_i], \text{ (prin convenție } \lambda_0 = 0 \text{)}.$$

Pasul 2: pentru $x_j \in X$ și $(x_i, x_j) \in \Gamma$ vom pune

$$\lambda_j^{(1)} = \lambda_i + v(x_i, x_j), \text{ dacă } \lambda_j - \lambda_i > v(x_i, x_j)$$

$$\lambda_j^{(1)} = \lambda_j, \text{ dacă } \lambda_j - \lambda_i \leq v(x_i, x_j).$$

Pasul 3: Drumul (drumurile) căutat este determinat de arcele care satisfac egalitatea

$$\lambda_j^{(k)} - \lambda_i^{(k)} = v(x_i, x_j).$$

Dacă în algoritmul lui Ford vom considera la pasul 2:

pentru $x_j \in X$ și $(x_i, x_j) \in \Gamma$

$$\lambda_j^{(1)} = \lambda_i + v(x_i, x_j), \text{ dacă } \lambda_j - \lambda_i < v(x_i, x_j)$$

$$\lambda_j^{(1)} = \lambda_j, \text{ dacă } \lambda_j - \lambda_i \geq v(x_i, x_j),$$

se obține drumul de valoare maximă.

În cazul în care o valoare a indicelui j se repetă de q ori, înseamnă că în graf există q drumuri de aceeași valoare minimă (maximă).

Exemplu 2.1. Pentru transportul pe calea ferată a unor mărfuri de la localitatea x_0 la localitatea x_8 se pot utiliza liniile ferate existente între localitățile $x_i, i = \overline{0,8}$. Distanța, timpul necesar alimentării, solicitarea liniilor etc. determină timpul necesar parcurgerii drumului dintre localități. Să se determine localitățile și ordinea în care ele trebuie parcurse astfel încât timpul în care produsele ajung din x_0 în x_8 să fie minim.

În graful din figura 2 am reprezentat prin puncte localitățile, iar pe fiecare arc este notat timpul necesar parcurgerii sale. Determinați timpul minim, în care produsele ajung din x_0 în x_8 , se reduce la determinarea drumului de valoare minimă din acest graf.

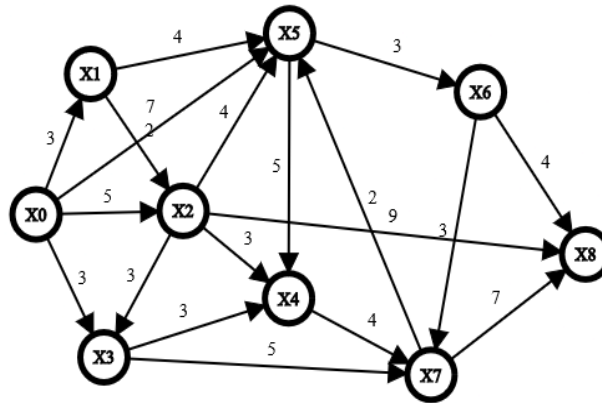


Fig. 2

Pasul 1

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
λ_i	0	3	5	3	8	7	12	8	15
$\lambda_i^{(1)}$	0	3	5	3	6	7	1	8	14

Tabel 2.1.

Pasul 2

(x_i, x_j)	$v(x_i, x_j)$	$\lambda_j - \lambda_i$	$\lambda_j^{(1)} - \lambda_i^{(1)}$
(x_0, x_1)	3	3	3
(x_0, x_2)	5	5	5
(x_0, x_3)	3	3	3
(x_0, x_5)	7	7	7
(x_1, x_2)	2	2	2
(x_1, x_5)	4	4	4
(x_2, x_3)	3	3	3
(x_2, x_4)	3	3	1
(x_2, x_5)	4	2	2

(x_2, x_8)	9	10	9
(x_3, x_4)	3	5	3
(x_3, x_7)	5	5	5
(x_4, x_7)	4	0	2
(x_5, x_4)	5	1	-1
(x_5, x_6)	3	5	3
(x_6, x_7)	3	-4	-2
(x_6, x_8)	4	3	4
(x_7, x_5)	2	-1	-1
(x_7, x_9)	7	7	6

Tabel 2.2.2.

Pasul 3

Se citesc drumurile din arcele pentru care elementele de pe coloana $v(x_i, x_j)$ sunt egale u elementele de pe coloana $\lambda_j^{(1)} - \lambda_i^{(1)}$. Se obțin drumurile:

$u_1 = (x_0, x_1, x_5, x_6, x_8)$, $u_2 = (x_0, x_1, x_2, x_8)$, $u_3 = (x_0, x_2, x_8)$, $u_4 = (x_0, x_5, x_6, x_8)$.
de valoare $\lambda_8^{(1)} = 14$.

Vom da acum o teoremă de caracterizare a valorilor minimale în cazul când acestea există. Pentru $\forall x \in \Gamma^*(x_0)$; λ_x = valoarea minimă a drumurilor de la x_0 la x (prin convenția $\lambda_{x_0} = 0$),

$pred_x$ = predecesorul lui x pe un drum elementar de valoare optimă de la x_0 la x ($pred_x$, nu este definit). Pe scurt, $pred_x$ va reprezenta predecesorul optim al lui x . Cuplul $(\lambda_x, pred_x)$ constituie atributul de optim (relativ la problema pusă) a vârfului x .

Teorema 2.2. Mulțimea de atribute $(\lambda_x, pred_x)_{x \in \Gamma^*(x_0)}$ este o mulțime de atribute minimală dacă și numai dacă următoarele două condiții sunt verificate:

- $\forall x \in \Gamma^*(x_0), \forall (x, y) \in \Gamma : \lambda_y - \lambda_x \leq v(x, y)$
- $\forall x \in \Gamma^*(x_0) : \lambda_x - \lambda_{pred_x} = v(pred_x, x)$.

2. Algoritmul lui Bellman-Kalaba

Se aplică la toate grafurile valorizate și permite detectarea eventualelor circuite absorbante.

Pașii algoritmului Bellmann – Kalaba sunt:

Pasul 1. Se asociază grafului $G = (X, \Gamma)$ mtricea $A = (a_{ij})$, unde

$$a_{ij} = \begin{cases} v(x_i, x_j), \text{dacă } (x_i, x_j) \in \Gamma \\ 0, \text{dacă } x_i = x_j \\ +\infty, \text{dacă } (x_i, x_j) \notin \Gamma. \end{cases}$$

Pasul 2. Fiecărui vârf $x_i \in X$ i se asociază un șir de numere reale $(V_i^{(k)})$, $k = 0, 1, \dots$, în modul următor:

$$A) \begin{cases} V_i^{(0)} = a_{in}, i = \overline{0, n-1} \\ V_n^{(0)} = 0 \end{cases}$$

$$B) \forall k \geq 1: \begin{cases} V_i^{(k)} = \min_{j \neq i} (V_j^{(k-1)} + a_{ij}), i = \overline{0, n-1}, j = \overline{0, n} \\ V_n^{(k)} = 0. \end{cases}$$

Pasul 3. Dacă într-o etapă k , oarecare, obținem $V_i^{(k)} = V_i^{(k-1)}$, $i = \overline{0, n}$, algoritmul ia sfârșit.

Pentru determinarea drumului minim de la x_0 la x_n urmărim pe coloana $V_i^{(k)}$ valorile strict descrescătoare ce ne conduc în sens invers, din aproape în aproape, de la x_n la x_0 .

În cazul căutării drumului maxim, algoritmul se modifică în sensul că se pune $-\infty$ în loc de $+\infty$, iar valorile $V_i^{(k)}$ se determină schimbând simbolul *min* prin simbolul *max*. Calculele laborioase care conduc la precizarea drumului de valoare minima pot fi reduse prin aplicarea procedeului următor:

- Matricei A i se asociază o “matrice de extensie” ale cărei coloane $V_i^{(k)}, k = 0, 1, \dots$, scrise în prelungirea matricei A , se obțin astfel:
- elementele primei coloane a matricei extinse, $V_i^{(0)}, i = \overline{0, n-1}$, sunt elementele ultimei coloane a matricei A .
- elementele coloanei a doua, $V_i^{(1)}$, a matricei extinse se obține:
- se adună elementele liniilor matricei A , exceptând adunarea elementelor situate pe diagonală, cu elementele corespunzătoare ale primei coloane a matricei extinse.
- din sumele astfel obținute se vor reține sumele de valoare minimă care se înscriu în coloana a doua, $V_i^{(1)}$, a matricei extinse
- se repeat procedeul adunând liniile matricei A , în condițiile prevăzute la elementele coloanei a doua a matricei de extensie și se obține coloana a treia ale cărei elemente sunt valorile $V_i^{(2)}$.

Ultima iterație conduce la obținerea unei coloane ale cărei elemente sunt identice cu acelea ale coloanei precedente. Primul element al acestei ultime coloane reprezintă valoarea drumului minim.

Exemplul 3.1. Pentru acest exemplu să aplicăm algoritmul Bellmann-Kalaba folosind procedeul de mai sus.

Matricei $A = (a_{ij})$, scrisă sub forma unui tabel, îi asociem matricea de extensie $\tilde{A}$:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$V_i^{(0)}$	$V_i^{(1)}$	$V_i^{(2)}$
x_0	0	3	5	3	∞	7	∞	∞	∞	∞	4	14
x_1	∞	0	2	∞	∞	4	∞	∞	∞	∞	11	11
x_2	∞	∞	0	3	3	4	∞	∞	9	9	9	9
x_3	∞	∞	∞	0	3	∞	∞	5	∞	∞	12	12
x_4	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	4	∞	∞	11	11
x_5	∞	∞	∞	∞	5	0	3	∞	∞	∞	7	7
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3	4	4	4	4
x_7	∞	∞	∞	∞	∞	2	∞	0	7	7	7	7
x_8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	0	0	0

De exemplu:

$$V_0^{(1)} = \min\{3 + \infty, 5 + 9, 3 + \infty, \infty + \infty, 7 + \infty, 4 + \infty, \infty + 7, \infty + 0\} = 14$$

$$V_0^{(1)} = \min\{\infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 9, 3 + \infty, \infty + \infty, \infty + 4, 5 + 7, \infty + 0\} = 12$$

Valoarea drumului minim este data de prima valoare din coloanele egale, adică $V_0^{(1)}$ sau $V_0^{(2)}$ și este $V(u) = 14$ cu $u = [x_0 \times x_8]$. Pentru stabilirea succesiunii care formează drumul (drumurile) de valoare minimă urmărim coloana $V_i^{(1)}$ sau $V_i^{(2)}$ valorile strict descrescătoare și astfel obținem:

$$u_1 = (x_0, x_2, x_8), u_2 = (x_0, x_1, x_5, x_6, x_8), u_3 = (x_0, x_1, x_2, x_8), u_4 = (x_0, x_5, x_6, x_8) \text{ cu } v(u_1) = v(u_3) = v(u_4) = 14$$

Algoritmul Bellmann – Kalaba se bazează pe rezultatul următor:

Teorema 3.2. Considerăm valorile $\lambda_x^{(k)}$ definite prin:

$$\lambda_x^{(1)} = \begin{cases} v(x_0, x), \text{ dacă } (x_0, x) \in \Gamma \\ 0, \text{ dacă } x = x_0 \\ +\infty, \text{ dacă } (x_0, x) \notin \Gamma \end{cases}$$

și $\forall k \geq 2, \lambda_x^{(k)} = \min_{y \in \Gamma^{-1}(x)} [\lambda_y^{(k-1)} + v(y, x)]$.

Atunci $\lambda_x^{(k)}$ = valoarea minima a drumurilor de la x_0 la x , de lungime $\leq k$ ($+\infty$ dacă nu există un drum de la x_0 la x).

Demonstrația se face prin recurență, după k . Pentru $k = 1$, teorema este verificată din definiția lui $\lambda_x^{(1)}$. Presupunem teorema verificată pentru $k - 1 \geq 1$.

Cazul1. Fie $x \in \bigcup_{j=1}^k \Gamma^{[j]}(x_0)$.

Atunci există în G un drum $u = [x_0 * x]$ cu $|u| \leq k$.

Fie y predecesorul lui x pe acest drum. Avem deci

$$u = u_1 \circ (y, x) \text{ cu } u_1 = [x_0 * y], |u_1| \leq k - 1.$$

Cu convenția $u_1 = 0 \Rightarrow v(u_1) = 0$, obținem, conform ipotezei de recurență, respective definiției lui $\lambda_x^{(k)}$:

$$v(u) = v(u_1) + v(y, x) \geq \lambda_y^{(k-1)} + v(y, x) \geq \lambda_x^{(k)}.$$

Pe de altă parte, conform definiției lui $\lambda_x^{(k)}$, există un predecesor y_0 al lui x , pentru care

$$\lambda_x^{(k)} = \lambda_{y_0}^{(k-1)} + v(y_0, x)$$

și, conform ipotezei de recurență, există un drum $\bar{u}_1 = [x_0, y_0]$, astfel încât $|\bar{u}_1| \leq k - 1$,

$$v(\bar{u}_1) = \lambda_{y_0}^{(k-1)}, \text{ de unde rezultă ca } \bar{u} = \bar{u}_1 \circ (y_0, x) \text{ verifică } |\bar{u}| \leq k \text{ și } v(\bar{u}) = \lambda_x^{(k)}.$$

Cazul2. Fie $x \notin \bigcup_{j=1}^k \Gamma^{[j]}(x_0)$.

Prin urmare, $\forall y \in \Gamma^{-1}(x_0) \Rightarrow y \notin \bigcup_{j=1}^{k-1} \Gamma^{[j]}(x_0) \Rightarrow \lambda_y^{(k-1)} = +\infty \Rightarrow \lambda_x^{(k)} = +\infty$.

Coloralul 3.3. Există $k \leq n$ astfel încât $\forall x \in X: \lambda_x^{(k)} = \lambda_x^{(k-1)}$ dacă și numai dacă subgraful G_0 nu conține circuite absorbante.

Demonstrația presupune că $\exists x \in X$ astfel încât $\lambda_x^{(n)} < \lambda_x^{(n-1)}$.

Atunci există un drum $u = [x_0 * x]$ cu $|u| \leq n$, și pentru orice drum $u' = [x_0 * x]$ cu $|u'| \leq n - 1$, avem $v(u) \leq v(u')$.

Ținând cont că drumul u are cel puțin un arc în plus față de u' iar din ipoteza de mai sus am obținut $v(u) \leq v(u')$, rezultă că în subgraful G_0 există cel puțin un circuit de valoare negativă.

Reciproc, dacă găsim un drum de valoare minima de la x_0 la x , atunci, conform teoremei.3.2, subgraful G_0 nu are circuite absorbante.

Coloralul 3.4. $\forall k \geq 1, \forall x \in \Gamma^*(x_0)$, predecesorul lui x pe un drum de valoare minima de la x_0 la x , de lungime minima sau egală cu k , este un vârf y pentru care minimul este atins la calculul lui $\lambda_x^{(k)}$.

Sintetizând datele din Exemplul 2.2.1, prezentăm soluția finală a problemei

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_0	0	3	5	3	∞	7	∞	∞	∞
x_1	∞	0	2	∞	∞	4	∞	∞	∞
x_2	∞	∞	0	3	3	4	∞	∞	9
x_3	∞	∞	∞	0	3	∞	∞	5	∞
x_4	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	4	∞

x_5	∞	∞	∞	∞	5	0	3	∞	∞
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3	4
x_7	∞	∞	∞	∞	∞	2	∞	0	7
x_8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
$m_{i8}^{(1)}$	∞	∞	9	∞	∞	∞	4	7	0
$m_{i8}^{(2)}$	14	11	9	12	11	7	4	7	0
$m_{i8}^{(3)}$	14	11	9	12	11	7	4	7	0

Astfel, drumul de valoare minimă, cu numărul minim de arce este $u_1 = (x_0, x_2, x_8)$.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Izvercian P.N., Crețu V.I., M.Izvercian, Resiga R., (1994), *Introducere in teoria grafurilor. Metoda drumului critic*, Editura de Vest, Timisoara .
- [2] Alb Lupaș A., Tușe D., Cătaș A. (2019). *Algoritmica grafurilor*, Editura Universității din Oradea
- [3] Fanache D. (2016), *Teoria algoritmica a grafurilor*, Vol. I, II, Editura Paralela 45
- [4] Coșulschi, M. (2021), *Algoritmica grafurilor și aplicații*, Ediția A III-A, Editura: Editura Universitaria
- [5] Moise G. *Algoritmica grafurilor*, 2007, ISBN: 978-973-719-144-1
- [6] Rădescu N., Rădescu E. (1982), *Probleme de teoria grafurilor*, Editura Scrisul Romanesc
- [7] Tomescu I. (1981), *Probleme de combinatorica și teoria grafurilor*, Editura: Didactica și Pedagogica
- [8] Wainberg D., Breaz D., Alb Lupaș A. (2010). *Elemente de Algoritmica grafurilor*, Editura Aeternitas, Alba Iulia, , pp. 193

DEFECTUL DE DISTRIBUTIVITATE AL OPERAȚIILOR BINARE

Corina Nicoleta NEGRUȚIU

Colegiul Tehnic “Traian Vuia” Oradea, profesor de matematică, corina_negrutiu@yahoo.com

Rezumat: Definim defectul de distributivitate al unei operații binare ca măsura în care aceasta se abate de la a avea proprietatea de distributivitate. Propunem mai multe exemple de calcul, cu nivele diferite de dificultate, ținând cont că trebuie să determinăm valoarea maximă a unei funcții de trei variabile.

Cuvinte cheie: operație binară, defectul de distributivitate

INTRODUCERE

În mod obișnuit studiem proprietățile operațiilor binare (comutativitatea, asociativitatea, idempotența, distributivitatea, existența elementului neutru, inversabilitate, etc) fără a ne pune problema- în cazul în care o anumită proprietate nu are loc - cât de departe este respectiva operație binară de a avea proprietatea studiată. În [3] au fost studiate proprietățile de asociativitate, comutativitate și idempotența ale operațiilor binare definite pe submulțimi de numere reale. Ideea studiilor de acest tip a fost inițiată în [1].

În această lucrare definim și studiem defectele de distributivitate la stânga, distributivitate la dreapta și distributivitate ale operațiilor binare. Chiar dacă un cadru mai general poate fi considerat, vom insista asupra operațiilor binare definite pe o mulțime inclusă în $\mathbb{R}$, iar distanța utilizată va fi cea uzuală pe $\mathbb{R}$, adică modulul.

În acest articol, $M \subseteq \mathbb{R}$ și $*, \circ : M \times M \rightarrow M$ notează operații binare pe M .

DEFINIȚIA DEFECTULUI DE DISTRIBUTIVITATE

Așa cum știm (vezi de exemplu [2]), operația binară $*$ este distributivă la stânga față de (sau relativ la) operația binară $\circ$ dacă

$$x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z), \forall x, y, z \in M,$$

astfel că este natural să definim:

DEFINIȚIA 1 Fie $*$ și $\circ$ operații binare pe M .

$$D_{distr}^S(M, *, \circ) = \sup\{|x * (y \circ z) - (x * y) \circ (x * z)| : x, y, z \in M\} \quad (1)$$

se numește defectul de distributivitate la stânga al operației $*$ față de operația binară $\circ$.

Similar, operația binară $*$ este distributivă la dreapta față de (sau relativ la) operația binară $\circ$ dacă (vezi de exemplu [2])

$$(y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x), \forall x, y, z \in M,$$

așa că definim

DEFINIȚIA 2 Fie $*$ și $\circ$ operații binare pe M .

$$D_{distr}^D(M, *, \circ) = \sup\{|(y \circ z) * x - (y * x) \circ (z * x)| : x, y, z \in M\} \quad (2)$$

se numește defectul de distributivitate la dreapta al operației $*$ față de operația binară $\circ$.

Dacă $*$ = $\circ$ atunci numim cantitățile date în (1) și (2) defect de autodistributivitate la stânga, respectiv dreapta, și le notăm $D_{distr}^S(M, *)$, respectiv $D_{distr}^D(M, *)$.

REMARCA 1 Dacă $*$ este comutativă atunci $D_{distr}^S(M, *, \circ) = D_{distr}^D(M, *, \circ)$, iar valoarea comună se numește defectul de distributivitate al operației $*$ față de operația binară $\circ$ și se notează $D_{distr}(M, *, \circ)$.

PROPRIETATEA DEFECTULUI DE DISTRIBUTIVITATE

Proprietățile de bază ale defectelor de distributivitate introduse în secțiunea precedentă sunt următoarele:

TEOREMA 2 (i) Operația binară $*$ este distributivă la dreapta (stânga) față de operația binară $\circ$ dacă și numai dacă $D_{distr}^D(M, *, \circ) = 0$ ($D_{distr}^S(M, *, \circ) = 0$);

(ii) Operația comutativă $*$ este distributivă față de operația binară $\circ$ dacă și numai dacă $D_{distr}(M, *, \circ) = 0$;

(iii) Dacă $*$ este monoton crescătoare atunci

$$D_{distr}^D(M, *, \max) = D_{distr}^S(M, *, \max) = 0,$$

unde $\max$ notează maximumul;

(iv) Dacă $*$ este monoton crescătoare atunci

$$D_{distr}^D(M, *, \min) = D_{distr}^S(M, *, \min) = 0,$$

unde $\min$ notează minimumul;

(v) Dacă $M = [0,1]$ și $\circ$ este duala lui $*$, adică

$$x \circ y = 1 - (1 - x) * (1 - y), \forall x, y \in [0,1]$$

Atunci

$$D_{distr}^S(M, *) = D_{distr}^S(M, \circ),$$

$$D_{distr}^D(M, *) = D_{distr}^D(M, \circ)$$

și

$$D_{distr}(M, *) = D_{distr}(M, \circ).$$

DEMONSTRAȚIE (i), (ii) Evident.

(iii) Dacă $y \leq z$ atunci $y * x \leq z * x, \forall x \in M$, așadar

$$\max(y, z) * x = \max(y * x, z * x).$$

Dacă $z \leq y$ atunci $z * x \leq y * x, \forall x \in M$, așadar egalitatea precedentă este de asemenea adevărată.

Obținem imediat că $D_{distr}^D(M, *, \max) = 0$.

(iv) Analog cu (iii).

(v) Obținem

$$\begin{aligned} & (y \circ z) \circ x - (y \circ x) \circ (z \circ x) \\ &= 1 - (1 - y \circ z) * (1 - x) - 1 + (1 - y \circ x) * (1 - z \circ x) \\ &= -((1 - y) * (1 - z)) * (1 - x) + ((1 - y) * (1 - x)) * ((1 - z) * (1 - x)) \\ &= (y' * z') * x' + (y' * x') * (z' * x'), \forall x, y, z \in [0,1], \end{aligned}$$

unde $x' = 1 - x, y' = 1 - y, z' = 1 - z$. Așadar

$$\begin{aligned} & D_{distr}^D(M, \circ) \\ &= \sup\{|(y \circ z) \circ x - (y \circ x) \circ (z \circ x)| : x, y, z \in [0,1]\} \\ &= \sup\{|((1 - y) * (1 - z)) * (1 - x) - ((1 - y) * (1 - x)) * ((1 - z) * (1 - x))| : x, y, z \in [0,1]\} \\ &= \sup\{|(y * z) * x - (y * x) * (z * x)| : x, y, z \in [0,1]\} \\ &= D_{distr}^D(M, *) . \end{aligned}$$

Analog $D_{distr}^S(M, *) = D_{distr}^S(M, \circ)$, iar egalitatea $D_{distr}(M, *) = D_{distr}(M, \circ)$ este imediată.

CALCULUL DEFECTULUI DE DISTRIBUTIVITATE

În exemplul de mai jos arătăm că, în general, defectul de distributivitate la stânga nu este egal cu defectul de distributivitate la dreapta. De asemenea, se dovedește că egalitățile

$$D_{distr}^D(M, *, \circ) = D_{distr}^D(M, \circ, *) \text{ și } D_{distr}^S(M, *, \circ) = D_{distr}^S(M, \circ, *)$$

nu sunt verificate pentru orice operații $*$ și $\circ$.

EXEMPLUL 1 Fie $M = [0,1]$, $\circ$ și $*$ definite prin $x \circ y = x + y$ și $x * y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y$.

Atunci

$$x * (y \circ z) - (x * y) \circ (x * z) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}(y + z) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y\right) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}z\right)$$

$$= -\frac{1}{4}x, \forall x, y, z \in [0,1]$$

$$\text{Adică } D_{distr}^S(M, *, \circ) = \sup\left\{\left|-\frac{x}{4}\right| : x \in [0,1]\right\} = \frac{1}{4},$$

$$\text{în timp ce } x \circ (y * z) - (x \circ y) * (x \circ z) = x + \frac{y}{4} + \frac{3z}{4} - \left(\frac{x+y}{4} + \frac{3}{4}y\right) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{3(x+z)}{4}\right) = 0, \forall x, y, z \in [0,1],$$

$$\text{Adică } D_{distr}^S(M, \circ, *) = 0.$$

Obținem

$$\begin{aligned} & |(y \circ z) * x - (y * x) \circ (z * x)| \\ &= |(y + z) * x - (y * x) - (z * x)| \\ &= \left| \frac{y+z}{4} + \frac{3x}{4} - \frac{y}{4} - \frac{3x}{4} - \frac{z}{4} - \frac{3x}{4} \right| = \frac{3x}{4}, \end{aligned}$$

Așadar

$$D_{distr}^D(M, *, \circ) = \sup\left\{\frac{3x}{4} : x \in [0,1]\right\} = \frac{3}{4}.$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} & D_{distr}^D(M, \circ, *) \\ &= \sup\{|(y * z) \circ x - (y \circ x) * (z \circ x)| : x, y, z \in [0,1]\} \\ &= \sup\left\{\left|\frac{y}{4} + \frac{3z}{4} + x - \frac{y+x}{4} - \frac{3(z+x)}{4}\right| : x, y, z \in [0,1]\right\} = 0. \end{aligned}$$

Dependența defectului de distributivitate de operațiile binare considerate poate fi constatată pe baza exemplului următor.

EXEMPLUL 2 Fie $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = x + y$ și $x * y = ax + by + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Atunci

$$\begin{aligned} & |(y \circ z) * x - (y * x) \circ (z * x)| \\ &= |a(y + z) + bx + c - (ay + bx + c) - (az + bx + c)| \\ &= |bx + c|, \forall x, y, z \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Așadar

$$D_{distr}^D(M, *, \circ) = \begin{cases} |c|, & \text{dacă } b = 0 \\ \infty, & \text{dacă } b \neq 0. \end{cases}$$

Constatăm că $*$ este distributivă la dreapta față de $\circ$ dacă și numai dacă $b = c = 0$.

Apoi

$$\begin{aligned} & |(y * z) \circ x - (y \circ x) * (z \circ x)| \\ &= |ay + bz + c + x - (a + b)x - ay - bz - c| \\ &= |x| \cdot |a + b - 1|, \forall x, y, z \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Deci

$$D_{distr}^D(M, \circ, *) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a + b - 1 = 0 \\ \infty, & \text{dacă } a + b - 1 \neq 0 \end{cases}$$

În exemplul următor operațiile binare $*$ și $\circ$ sunt norma triunghiulară și conorma sa triunghiulară duală. Defectul de distributivitate al normelor și conormelor triunghiulare este tratat în [1].

EXEMPLUL 3

Fie $M = [0,1]$ și $*, \circ$ operațiile binare definite prin $x * y = xy$, $x \circ y = x + y - xy$.

Deoarece $*$ și $\circ$ sunt comutative obținem (vezi Remarca 1)

$$D_{distr}^S(M, *, \circ) = D_{distr}^D(M, *, \circ) = D_{distr}(M, *, \circ)$$

și

$$D_{distr}^S(M, \circ, *) = D_{distr}^D(M, \circ, *) = D_{distr}(M, \circ, *) .$$

Obținem

$$\begin{aligned} & D_{distr}(M, *, \circ) \\ = & \sup\{|x(y + z - yz) - (xy + xz - x^2yz)| : x, y, z \in [0,1]\} \\ & = \sup\{|x(1 - x)yz| : x, y, z \in [0,1]\} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} & D_{distr}(M, \circ, *) \\ = & \sup\{|x + yz - xyz - (x + y - xy)(x + z - xz)| : x, y, z \in [0,1]\} \\ & = \sup\{|x(1 - x)(1 - y)(1 - z)| : x, y, z \in [0,1]\} = \frac{1}{4} . \end{aligned}$$

Desigur că pot fi găsite exemple de operații binare pentru care calculul defectelor de distributivitate este mult mai complex, dar considerăm exemplele de mai sus suficiente.

CONCLUZIE

Defectele de distributivitate la dreapta și la stânga ne dau informații în legătură cu calitatea unei operații binare relativ la proprietatea de distributivitate a unei operații față de alta. Calculul acestor defecte poate fi dificil pentru că necesită determinarea valorii maxime pentru o funcție de trei variabile. În lucrare am propus mai ales exemple simple pentru a fi bine înțelese noțiunile introduse.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Ban A.I., Gal S.G. (2002), *Defects of Properties in Mathematica: Quantitative Characterization*, World Scientific, New Jersey
- [2] Ganga M. (2007), *Matematica*, Manual pentru clasa a XII-a, Mathpress
- [3] Negruțiu C.N. (2022), *Defectele de comutativitate, asociativitate și idempotență ale operațiilor binare*, Științe exacte și științe ale naturii vol XIV, Oradea

STUDIUL RĂDĂCINILOR MULTIPLE ALE UNUI POLINOM

Răzvan Nicolae OTIMAN

Liceul Tehnologic "Mihai Novac" Oravița, județul Caraș-Severin, profesor de matematică, otimanrazvan@yahoo.com

Rezumat: În această lucrare vor fi puse în evidență modalități de stabilire a existenței rădăcinilor multiple ale unui polinom cu coeficienți numere reale și de determinare a acestora.

Cuvinte cheie: divizor, cel mai mare divizor comun, polinom, algoritmul lui Euclid, rădăcini comune a două polinoame.

INTRODUCERE

Pentru obținerea rezultatelor prezentate în această lucrare este necesară cunoașterea unor noțiuni legate de divizibilitatea numerelor. Acestea sunt prezentate în continuare.

Definiția 1. Spunem că numărul a se divide cu numărul b , și scriem $a : b$, dacă și numai dacă a este un multiplu al lui b , adică $a = Mb, M \in \mathbb{N}$. În acest caz spunem că b este un divizor al lui a .

Exemplu: $a = 12, b = 3, 12 : 3$. Într-adevăr, $12 = 4 \cdot 3$, adică $M = 4$.

Definiția 2. Vom nota cu $d = (a, b)$ cel mai mare număr natural care divide pe a și b .

Pentru determinarea celui mai mare divizor comun a două numere avem următoarele metode:

Metoda I. Metoda clasică presupune descompunerea în factori primi la diferite puteri și înmulțirea între ei a **factorilor comuni la puterea cea mai mică, luați o singură dată**. Produsul obținut este cel mai mare divizor comun al numerelor.

Exemplu: Să se determine cel mai mare divizor comun al numerelor $a = 18$ și $b = 204$.

$$\begin{array}{l} 18 = 2 \cdot 3^2 \\ 204 = 2^2 \cdot 3 \cdot 17 \\ \hline d = (18, 204) = 2 \cdot 3 = 6. \end{array}$$

Metoda II. Algoritmul lui Euclid pentru care există două variante: prin scăderi și prin împărțiri.

- **Algoritmul lui Euclid cu scăderi** se bazează pe ideea că cele mai mare divizor a două numere divide și diferența acestora. Cât timp numerele sunt diferite, se scade numărul mai mic din numărul mai mare. Când numerele devin egale, valoare comună este cel mai mare divizor comun al valorilor inițiale.
- **Algoritmul lui Euclid cu împărțiri** se bazează pe ideea că cel mai mare divizor a două numere divide și restul împărțirii acestora, conform teoremei împărțirii cu rest. Se împarte primul număr la al doilea și se determină restul acestei împărțiri. La pasul următor se împarte al doilea număr la restul obținut. Ultimul rest nenul este cel mai mare divizor comun al numerelor.

Exemplu:

Algoritmul lui Euclid cu scăderi:

$$\begin{array}{l} 204 - 18 = 186; 186 - 18 = 168; 168 - 18 = 150; 150 - 18 = 132; 132 - 18 = \\ 114; 114 - 18 = 96; 96 - 18 = 78; 78 - 18 = 60; 60 - 18 = 42; 42 - 18 = 24; 24 - \\ 18 = 6; 18 - 6 = 12; 12 - 6 = 6; 6 - 6 = 0. \end{array}$$

Deci

valoarea comună este 6 și acesta este cel mai mare divizor comun.

Algoritmul lui Euclid cu împărțiri:

$$\begin{array}{r|l} 204 & 18 \\ 18 & 11 \\ \hline & 24 \\ & c_1 \\ & 18 \end{array} \quad \text{Deci, primul cât este } c_1 = 11. \text{ Primul rest este } r_1 = 6.$$

$$\begin{array}{r} 6 = r_1 \\ 18 \overline{) 6} \text{ Al doilea cât este } c_2 = 3. \text{ Al doilea rest este } r_2 = 0. \\ 18 \overline{) 3} \\ 0 = r_2 \end{array}$$

Deci, cel mai mare divizor comun este ultimul rest nenul, $d = (18, 204) = 6$.

DIVIZIBILITATEA POLINOAMELOR

Definiția 3. Un polinom $\varphi(x)$ este divizor al polinomului $P(x)$ dacă polinomul $P(x)$ se împarte exact la polinomul $\varphi(x)$. În acest caz, se notează cu $q(x)$ câtul împărțirii lui $P(x)$ la $\varphi(x)$ având identitatea:

$$(1) \quad P(x) = \varphi(x) \cdot q(x).$$

Observația 1. a) Numim polinom de gradul zero orice număr real diferit de zero.

b) Orice polinom $P(x)$ are divizori pe 1 și pe $P(x)$.

Definiția 4. Polinomul $\varphi(x)$ este un divizor comun al polinoamelor $P(x)$ și $Q(x)$ dacă atât $P(x)$ cât și $Q(x)$ au ca divizor pe $\varphi(x)$.

Observația 2. Orice polinom de gradul zero, în particular 1, este un divizor al polinoamelor $P(x)$ și $Q(x)$.

Definiția 5. Dacă două polinoame $P(x)$ și $Q(x)$ nu au alt divizor comun decât polinomul de grad zero, spunem că ele sunt prime între ele.

Definiția 6. Cel mai mare divizor comun al polinoamelor $P(x)$ și $Q(x)$ este acel divizor comun care este divizibil prin orice divizor comun al polinoamelor.

Din această definiție rezultă că cel mai mare divizor comun al polinoamelor $P(x)$ și $Q(x)$ este divizorul lor comun de gradul cel mai mare. Se notează: $d(x) = (P(x), Q(x))$.

Fie $r(x)$ restul împărțirii polinomului $P(x)$ la $Q(x)$ și fie $q(x)$ câtul împărțirii. Din Teorema împărțirii cu rest avem egalitatea:

$$(2) \quad P(x) = Q(x) \cdot q(x) + r(x).$$

Se cunoaște următoarea teoremă:

Teorema 1. Dacă $\varphi(x)$ este un divizor comun al polinoamelor $P(x)$ și $Q(x)$ atunci acesta este divizor comun și al polinoamelor $Q(x)$ și $r(x)$.

Aceasta rezultă din (2).

Observația 3. a) Cel mai mare divizor comun a două polinoame rămâne același dacă unul dintre polinoame, sau chiar amândouă, se înmulțesc cu un număr diferit de zero.

b) Pentru determinarea celui mai mare divizor comun al polinoamelor $P(x)$ și $Q(x)$ avem două metode:

Metoda I. Metoda descompunerii în factori primi, luându-se factorii comuni celor două polinoame de gradul cel mai mic.

Metoda II. Algoritmul lui Euclid. Se împarte polinomul $P(x)$ la $Q(x)$ obținându-se câtul $q_1(x)$ și restul $r_1(x)$. Dacă $r_1(x) = 0$, atunci $d(x) = Q(x)$. Dacă $r_1(x) \neq 0$, polinomul $Q(x)$ se împarte la $r_1(x)$ obținând câtul $q_2(x)$ și restul $r_2(x)$. Dacă $r_2(x) = 0$, atunci $d(x) = r_1(x)$. Dacă $r_2(x) \neq 0$, polinomul $r_1(x)$ se împarte la $r_2(x)$ obținând câtul $q_3(x)$ și restul $r_3(x)$. Deoarece gradele polinoamelor $r_1(x), r_2(x), r_3(x)$ descresc, se ajunge la un moment dat la un rest $r_k(x)$ prin care restul $r_{k-1}(x)$ se împarte exact.

Dacă $r_k(x)$ este un polinom de gradul zero, atunci polinoamele $P(x)$ și $Q(x)$ sunt prime între ele.

Dacă $r_k(x)$ este un polinom de grad diferit de zero, atunci el este cel mai mare divizor comun al polinoamelor $P(x)$ și $Q(x)$, $r_k(x) = (P(x), Q(x))$.

Demonstrarea algoritmului lui Euclid rezultă din:

Fie $q(x)$ câtul împărțirii polinomului $P(x)$ la $Q(x)$ și fie $r(x)$ restul împărțirii. Atunci se poate scrie relația (2).

Fie acum $d(x) = (P(x), Q(x))$. Atunci $P(x) = d(x) \cdot P_1(x)$ și $Q(x) = d(x) \cdot Q_1(x)$. Înlocuind în relația (2), avem:

$$(3) \quad P_1(x) \cdot d(x) = Q_1(x) \cdot d(x) \cdot q(x) + r(x),$$

de unde rezultă:

$$(4) \quad r(x) = d(x)[P_1(x) - Q_1(x) \cdot q(x)].$$

Din relația (4) rezultă că $d(x)$ este un divizor al lui $r(x)$. Dacă $d(x)$ este un divizor al polinoamelor $Q(x)$ și $r(x)$, atunci $d(x)$ este un divizor al polinomului $P(x)$.

Dacă $Q(x) = d(x) \cdot Q_1(x)$ și $r(x) = d(x) \cdot r_1(x)$, atunci putem scrie, folosind (2):

$$P(x) = Q_1(x) \cdot d(x) + r_1(x) \cdot d(x) = d(x)[Q_1(x) + r_1(x)],$$

de unde rezultă că $d(x)$ este un divizor al lui $P(x)$.

În aplicarea algoritmului lui Euclid se ține seama de:

a) Dacă coeficienții unui rest au un factor comun, atunci se împarte cu acesta.

b) Fie $a_0x^p + a_1x^{p-1} + \dots$ unul din resturile parțiale și $b_0x^q + b_1x^{q-1} + \dots$ împărțitorul uneia dintre împărțiri, a_0 și b_0 fiind numere întregi. Dacă a_0 se împarte cu b_0 , atunci se înmulțește restul parțial cu un factor convenabil astfel încât noul coeficient al lui x^p să se împartă la b_0 .

Exemplul 1: Să se determine cel mai mare divizor comun al polinoamelor:

$$P(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3 \text{ și } Q(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3.$$

Aplicăm algoritmul lui Euclid:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3 & 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 \\ \hline 3x^4 + 9x^3 - 3x^2 - 12x - 9 & x - 1 \\ \hline -3x^4 - 10x^3 - 2x^2 + 3x & \\ / & -x^3 - 5x^2 - 9x - 9 \\ \hline -3x^3 - 15x^2 - 27x - 27 & \\ \hline 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 & \\ / & -5x^2 - 25x - 30 \end{array}$$

Notăm $q_1(x) = x - 1, r_1(x) = -5(x^2 + 5x + 6)$.

Urmează să împărțim $Q(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$ la $r_1(x) = x^2 + 5x + 6$.

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 & x^2 + 5x + 6 \\ \hline -3x^3 - 15x^2 - 18x & 3x - 5 \\ \hline / & -5x^2 - 16x - 3 \\ \hline 5x^2 + 25x + 30 & \\ / & 9x + 27 \end{array}$$

Notăm $q_2(x) = 3x - 5, r_2(x) = 9(x + 3)$.

Urmează să împărțim $r_1(x) = x^2 + 5x + 6$ la $r_2(x) = x + 3$.

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 5x + 6 & x + 3 \\ \hline -x^2 - 3x & x + 2 \\ \hline / & 2x + 6 \\ \hline -2x - 6 & \\ / & / \end{array}$$

$r_3(x) = 0$.

Deci, $r_2(x) = x + 3$ este cel mai mare divizor comun al polinoamelor:

$$P(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3 \text{ și } Q(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3.$$

Exemplul 2: Să se determine cel mai mare divizor comun al polinoamelor:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \text{ și } Q(x) = x^2 + x + 1.$$

Aplicăm algoritmul lui Euclid:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 + 2x - 1 & x^2 + x + 1 \\ \hline -x^3 - x^2 - x & x - 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} / -3x^2 + x - 1 \\ 3x^2 + 3x + 3 \\ \hline / 4x + 2 \end{array}$$

Notăm $q_1(x) = x - 3, r_1(x) = 2(2x + 1)$.

Urmează să împărțim $Q(x) = x^2 + x + 1$ la $r_1(x) = 2x + 1$.

$$\begin{array}{r|l} x^2 + x - 1 & 2x + 1 \\ 2x^2 + 2x + 2 & x + 1 \\ \hline -2x^2 - x & \\ \hline / x + 2 & \\ 2x + 4 & \\ \hline -2x - 1 & \\ \hline / 3 & \end{array}$$

Notăm $q_2(x) = x + 1, r_2(x) = 3$.

Urmează să împărțim $r_1(x) = 2x + 1$ la $r_2(x) = 3$.

$$\begin{array}{r|l} 2x + 1 & 3 \\ 6x + 3 & 2x + 1 \\ \hline -6x & \\ \hline / +3 & \\ -3 & \\ \hline / & \end{array}$$

$r_3(x) = 0$.

Deoarece $r_2(x) = 3$ este cel mai mare divizor comun al polinoamelor:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \text{ și } Q(x) = x^2 + x + 1,$$

polinoamele $P(x)$ și $Q(x)$ sunt prime între ele.

RĂDĂCINI COMUNE A DOUĂ POLINOAME

O aplicație importantă a noțiunii de cel mai mare divizor comun a două polinoame este noțiunea de rădăcini comune a două polinoame.

Teorema 2. Rădăcinile comune a două polinoame sunt rădăcini ale celui mai mare divizor comun al lor și reciproc.

Demonstrație.

Fie $d(x) = (P(x), Q(x))$. Atunci, $P(x) = d(x) \cdot P_1(x)$ și $Q(x) = d(x) \cdot Q_1(x)$, de unde rezultă că rădăcinile ecuației $d(x) = 0$ sunt rădăcini comune ale polinoamelor $P(x)$ și $Q(x)$.

Reciproc, fie $E(x)$ polinomul care ne dă rădăcinile comune ale polinoamelor $P(x)$ și $Q(x)$. Atunci $P(x) = E(x) \cdot P_1(x)$ și $Q(x) = E(x) \cdot Q_1(x)$ de unde rezultă că $d(x) = E(x)$.

Exemplul 3: Să se determine rădăcinile comune ale polinoamelor:

$$P(x) = x^4 - x^3 - x - 1 \text{ și } Q(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2.$$

Rezolvare. Determinăm cel mai mare divizor comun al polinoamelor $P(x)$ și $Q(x)$ folosind algoritmul lui Euclid.

$$\begin{array}{r|l} x^4 - x^3 - 0x^2 - x - 1 & x^3 + x^2 - 3x - 2 \\ -x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x & x - 2 \\ \hline / -2x^3 + 3x^2 + x - 1 & \\ 2x^3 + 2x^2 - 6x - 4 & \\ \hline / 5x^2 - 5x - 5 & \end{array}$$

Notăm $q_1(x) = x - 2, r_1(x) = 5(x^2 - x - 1)$.

Urmează să împărțim $Q(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2$ la $r_1(x) = x^2 - x - 1$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 - 3x - 2 & x^2 - x - 1 \\ -x^3 + x^2 + x & x + 2 \\ \hline / & 2x^2 - 2x - 2 \\ -2x^2 + 2x + 2 & \\ \hline / & / & / \end{array}$$

Aevm $q_2(x) = x + 2, r_2(x) = 0$.

Deci, $r_1(x) = x^2 - x - 1$ este cel mai mare divizor comun al polinoamelor.

Rădăcinile comune ale celor două polinoame sunt rădăcinile ecuației $x^2 - x - 1 = 0$.

Acestea sunt $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ și $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

RĂDĂCINI MULTIPLE ALE UNUI POLINOM

Definiția 7. Un polinom $P(x)$ are rădăcina x_1 multiplă de ordinul p dacă $P(x)$ se divide cu $(x - x_1)^p$ dar nu se divide cu $(x - x_1)^{p+1}$. Aceasta înseamnă că $P(x) = (x - x_1)^p g(x)$, $g(x) \neq 0$.

Din Definiția 7 rezultă următoarea proprietate:

Teorema 3. Dacă polinomul $P(x)$ are rădăcina multiplă x_1 de ordinul p , atunci derivata $P'(x)$ are rădăcina multiplă de ordinul $p - 1$.

Demonstrație. Dacă $P(x)$ are rădăcina multiplă x_1 de ordinul p atunci $P(x) = (x - x_1)^p g(x)$, $g(x) \neq 0$. Derivata,

$P'(x) = p(x - x_1)^{p-1} g(x) + (x - x_1)^p g'(x) = (x - x_1)^{p-1} [p \cdot g(x) + (x - x_1)g'(x)]$, sau $P'(x) = (x - x_1)^{p-1} g_1(x)$, unde $g_1(x) = p \cdot g(x) + (x - x_1)g'(x)$, $g_1(x) \neq 0$, de unde rezultă că $P'(x)$ are rădăcina multiplă x_1 de ordinul $p - 1$.

Observația 4. Pentru rădăcina multiplă x_1 de ordinul p are loc: $P(x_1) = 0, P'(x_1) = 0, \dots, P^{(p-1)}(x_1) = 0, P^{(p)}(x_1) \neq 0$.

Din Teorema 3 rezultă următoarea concluzie:

Corolarul 1. Dacă $P(x)$ are rădăcini multiple, atunci $P(x)$ și $P'(x)$ au rădăcini comune.

Corolarul 2. Rădăcinile multiple ale unui polinom sunt rădăcinile celui mai mare divizor comun al polinoamelor $P(x)$ și $P'(x)$.

Exemplul 4: Să se determine dacă polinomul $P(x) = x^6 - 3x^5 + 6x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ are rădăcini multiple.

Rezolvare.

Calculăm $P'(x) = 6x^5 - 15x^4 + 18x^2 - 6x - 3 = 3(2x^5 - 5x^4 + 6x^2 - 2x - 1)$.

Aplicând algoritmul lui Euclid determinăm:

$$d(x) = (P(x), P'(x)) = x^3 - x^2 - x - 1 = x^2(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)^2(x + 1).$$

Rădăcinile ecuației $(x - 1)^2(x + 1) = 0$ sunt $x_1 = x_2 = 1, x_3 = -1$ și acestea sunt comune polinoamelor $P(x)$ și $P'(x)$ ceea ce, conform Corolarului 2 înseamnă că $P(x)$ are rădăcinile multiple $x_1 = x_2 = 1, x_3 = -1$.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Ionescu D.V. (1978), *Complemente de matematici pentru licee*, Editura Didactică și Pedagogică, București
- [2] Turcan R., Turcan C.S. (2010), *Probleme de matematică date la concursuri naționale*, Editura Universității din Oradea
- [3] Năstăsescu C., Niță C., etc. (1999). *Algebră – Bacalaureat și admitere la facultate*, Editura Rotech Pro, București

ALGORITMI CRIPTOGRAFICI SIMPLI CONSTRUIȚI ÎN MAȘINI TURING

Roland-Alexandru PALI¹, Marian DEGERATU²

¹ Student anul II, Informatică, Facultatea de Științe, Universitatea din Oradea, roland527x@gmail.com

² Lect. univ. dr. Departamentul de Matematică și Informatică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea, degeratu.marian@gmail.com

Rezumat: Pornind de la teorema mașinilor Turing în care aceștia sunt definite ca fiind un concept matematic care pot fi adaptate să simuleze logica unui calculator, în această lucrare ne propunem construcția unor mașini Turing care sunt în stare să simuleze algoritmul de criptare sau decriptare a textului aflat pe banda de input.

Vom alege doi algoritmi simpli de criptare și vom analiza traducerea acestor algoritmi într-o mașină Turing.

Cuvinte cheie: mașină Turing, criptare, decriptare, stare, funcție de tranziție.

INTRODUCERE

În primul rând trebuie să ne familiarizăm cu conceptul abstract al unei mașini Turing [1]. O mașină Turing fiind un concept matematic, se poate defini ca un tuplu de 7 elemente ($Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F$)

- ◇ Q – mulțimea stărilor finite
- ◇ Σ – alfabetul de intrare ($\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{ B \}$)
- ◇ Γ – alfabetul aparatului
- ◇ δ – funcția de tranziție ($Q \times \Gamma \mapsto Q \times \Gamma \times \{ L, R \}$)
- ◇ q_0 – starea inițială ($q_0 \in Q$)
- ◇ B – simbolul null
- ◇ F – mulțimea stărilor finale (stări de accept și stări de reject)

Mașina Turing are o bandă infinită [2] în ambele direcții pe care se inserează textul input înaintea rulării mașinii. Mașina citește simbolurile de pe bandă având un head-pointer care se deplasează în stânga sau în dreapta după fiecare citire și reține poziția pe bandă. Head-pointer-ul se află mereu la începutul inputului aflat pe bandă.

Mașina va citi și suprascrie simbolurile conform unei funcții de tranziție care este alcătuită din starea curentă și simbolul citit, acesta având codomeniul cu starea următoare, simbolul output care suprascrie simbolul citit și direcția de deplasare [3].

Pentru notație grafică [6] vom defini starea ca un nod cu numele stării în mijloc, iar pe muchii va apărea notația de tranziție astfel: “INPUT / OUTPUT, DIRECȚIE”. [Fig 1.]

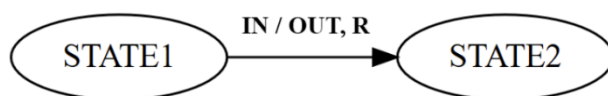


Figura 1. Reprezentarea prin graf a unei mașini Turing.

Mecanismul unei mașini Turing este simplu [2], mașina citește un simbol de pe bandă, conform funcției de tranziție își schimbă starea, se deplasează spre dreapta (R) sau stânga (L) și suprascrie simbolul citit cu simbolul output din funcție.

Dacă la orice moment mașina ajunge la o stare finală, se oprește [1]. Problema opririi unei mașini Turing este un alt concept popular, dar pentru scopul nostru o să definim mașinile Turing astfel încât să se oprească mereu.

Astfel pentru o mașină Turing capabil de criptare / decriptare, putem defini alfabetul de intrare:

$$\Sigma = \{ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z \}.$$

Pentru a determina restul mulțimilor, va trebui să alegem algoritmul de criptare [4] și să analizăm comportamentul acestuia.

Pentru simulare vom folosi **Turing Machine Simulator & Builder**, un program creat de mine pentru a putea simula o mașină Turing simplă, cu o singură bandă, disponibil pe internet prin intermediul paginilor statice github.

SUBSTITUȚIA MONOALFABETICĂ

Acest algoritm de criptare este unul dintre cele mai vechi și cele mai simple [4]. Se folosește de o permutare a alfabetului, prin urmare textul se criptează prin înlocuirea fiecărei litere cu litera corespunzătoare din permutare.

De exemplu vom folosi următoarea permutare:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	V	S	H	T	U	L	A	K	J	O	Q	C	D	E	Z	R	N	F	X	Y	I	G	P	M	W

Pentru această permutare un text „**TURING**” ar fi criptat în „**XYNKDL**”.

Acest algoritm nu este simetric [4], asta înseamnă că aplicând încă o dată un algoritm de criptare pe un text deja criptat, nu o să obținem textul descifrat.

SUBSTITUȚIA MONOALFABETICĂ CU O MAȘINĂ TURING

Pentru transformarea algoritmului de mai sus într-o mașină Turing, putem proceda în două modalități:

- ◇ O singură stare “hard-coded” cu permutarea alfabetului.
- ◇ O mașină Turing care citește și permutarea respectivă de pe bandă.

În acest capitol vom construi mașina Turing în primei modalități, a doua modalitate este una mai complicată și similară algoritmului unei criptări cu cheie.

Pentru a construi mașina Turing care va cripta textul pe baza acestei permutări, trebuie doar să definim funcția de tranziție relația fiecărei litere citite cu litera corespunzătoare din permutare pentru output. Starea se deplasa mereu spre dreapta până la finalul textului, când citește un simbol gol mașina se va opri. [Fig 2]

Încercând în programul de simulare [Fig 3-4], conceptul funcționează:

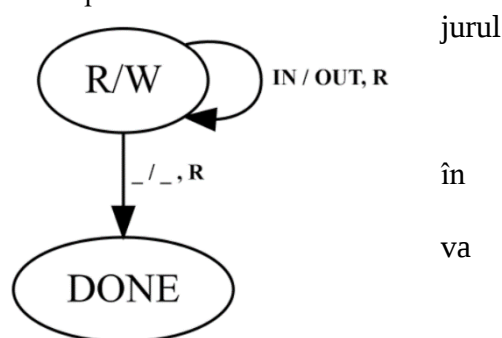


Figura 2. Diagrama [6] mașinii de



Figura 3. Programul de simulare cu textul “TURING” aflat pe bandă.



Figura 4. Programul de simulare în urma opririi mașinii Turing, cu textul “XYNKDL” rămas pe bandă.

Mașina de decriptare a oricărei permutări va avea același concept, cu singura modificare la starea de R/W unde se va inversa input symbol cu output symbol. Mașina Turing având o singură stare curentă, îi este posibil să știe dacă este în modul de criptare / decriptare doar prin adăugarea unor simboluri și stări adiționale. Astfel este mai ușor să avem două mașini pentru criptare și decriptare.

Acest algoritm este unul foarte simplu [4], însă este esențial să înțelegem conceptul de substituție printr-o stare, pe care o vom extinde în capitolul cifrului Vigenère încercând să o implementăm într-o mașină Turing.

CIFRUL VIGENÈRE

Se bazează pe conceptul substituției și pe baza unei chei de criptare [5]. Cifrul Vigenère va substitui toate literele textului, cu o deplasare al alfabetului specific unui caracter din cheie (Cifrul lui Cezar).

Mai precis, matematic având conversia implicită între caracter și număr corespunzător cu indexul caracterului din alfabet de lungime L , obținem formula de criptare pentru un text T unde T_i este un caracter la poziția i , o cheie K de lungime m unde K_i este un caracter la poziția i , notând textul cifrat cu C :

$$C_i = (T_i + K_{i \bmod m}) \bmod L - \text{Formula pentru criptare.}$$

$$T_i = (C_i - K_{i \bmod m}) \bmod L - \text{Formula pentru decriptare.}$$

De exemplu, având ca text inițial **TURING** și folosind cheia **SECRET**, se va obține **LYTZRZ**.

$$T_1 = (19(T) + 18(S)) \bmod 26 = 11(L)$$

$$T_2 = (20(U) + 4(E)) \bmod 26 = 24(Y)$$

...

$$T_6 = (6(G) + 19(T)) \bmod 26 = 25(Z)$$

CIFRUL VIGENÈRE CU O MAȘINĂ TURING

Pentru a putea implementa deplasarea alfabetului, ne vom folosi de conceptul de substituție “hard-coded”, similar cu substituția unei permutări al alfabetului prezentat anterior.

Substituția prin permutare “hard-coded” este o modalitate de a imagina starea ca un rotor mecanic, fiecare cifră fiind legat de alta, similar cu rotoarele mașinii *Enigma* [Fig.5].

Implementarea acestui algoritm sub forma unei mașini Turing devine destul de complicat, ne vom folosi de notația „{&C}” pentru a reprezenta un caracter oarecare din alfabet. Pentru fiecare caracter din alfabet, aparatul va avea la îndemână doua tipuri de caractere pentru a citi și a reține starea de citit, prefixate cu „\$” pentru caracterele citite din cheie și „*” pentru caracterele citite din text.

Pentru a face diferența dintre text și cheie, ne vom folosi de simbolul „=” care va fi inserat între text și cheie pe banda inițială.

Vom defini mașina Turing capabilă de criptare prin algoritmul lui Vigenère astfel:

- ◇ $Q - \{ \text{DONE, ERROR, READ, FIND-KEY, READ-KEY, REFRESH-KEY, WRITE-\{&C\}} \}$
- ◇ $\Sigma - \{ \{&C\}, = \}$
- ◇ $\Gamma - \{ \Sigma \cup \{&C\} \cup \{ \$\{&C\} \cup B \}$
- ◇ $\delta - \text{Fig. 6.}$
- ◇ $q_0 - \{ \text{READ} \}$

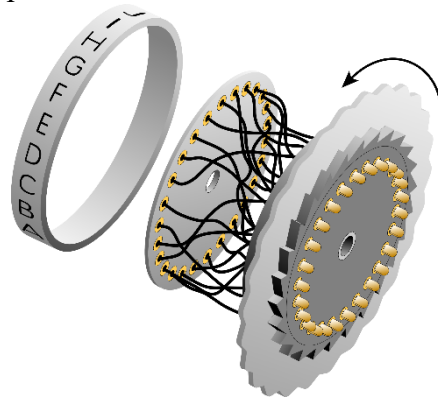


Figura 5. Rotor de substituție

- ◇ B – simbolul null reprezentat prin „_”
- ◇ F – { DONE, ERROR }

Evident crearea acestei mașini Turing înseamnă generarea fiecărei deplasări ai alfabetului, având o stare pentru fiecare cifră. Astfel se creează $80 \text{ (caractere acceptate de mașină)} * 32 \text{ (de stări)} = 2560$ de funcții de tranziție ca această mașină să fie conform definiției. Această procedură poate fi scurtată printr-o generare automată făcută de un limbaj de programare, unde funcțiile de tranziție cu notație **{&C}** sunt create iterativ cu formula matematică după indecși.

Pentru decriptare aparatul funcționează la fel, însă este configurat diferit la nivelul funcțiilor de tranziție pentru stările de **Write-{@C}**, la fel ca la o substituție oarecare, pentru a obține substituția inversă, se inversează simbolul de input cu simbolul de output.

Pentru a înțelege logica acestei mașini, ne vom folosi de diagrama reprezentativă. [Fig 6.]

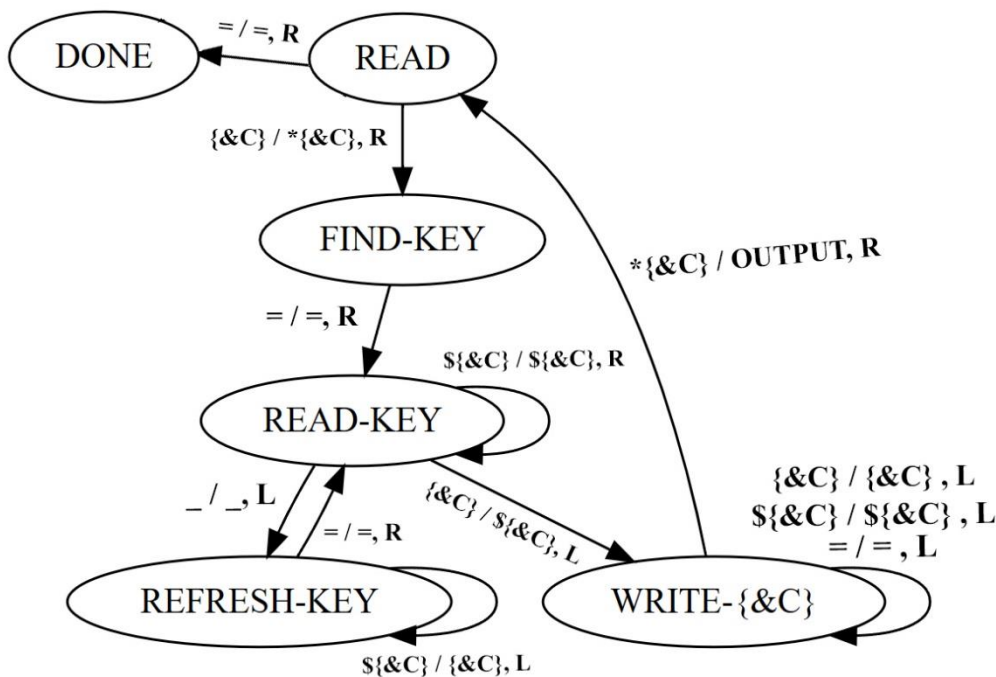


Figura 6. Diagrama [6] mașinii Turing de criptare / decriptare pentru cifrul Vigenère.

Începând din starea **READ**, mașina citește un caracter, îl înlocuiește cu un caracter prefixat cu * pentru a marca caracterul citit și trece în starea de **FIND-KEY**.

În starea de **FIND-KEY**, caută separatorul definit prin = pentru a găsi cheia de criptare / decriptare și trece în starea de **READ-KEY**.

READ-KEY va găsi primul caracter nemarcat și prin acest caracter își încarcă modelul de substituție, trecând la starea **WRITE-{@C}**.

Când mașina încearcă să citească primul caracter nemarcat din cheie, acesta poate ajunge la finalul inputului, dacă cheia este mai scurtă decât textul, aici intervine formula modulo cu lungimea cheii, și mașina se va duce, de la sfârșitul cheii, schimbând toate caracterele prefixate cu \$ din cheie cu caractere nemarcate prin starea **REFRESH-KEY**.

WRITE-{@C} conține substituția alfabetului curent și se va duce la caracterul marcat cu * din text pentru a-l înlocui, prin urmare completând un singur ciclu de substituție.

Acest ciclu continuă până când starea **READ** citește separatorul „=”, atunci știe că a ajuns la finalul textului, iar pe bandă se va afla textul criptat.

Prin acest model ne asigurăm că la un moment dat avem doar o singură cifră marcată cu „*”, iar în urma substituției **READ** va citi mereu următoarea cifră. Similar la marcarea caracterelor din cheie, **READ-KEY** ignoră toate caracterele deja marcate, iar în urma ieșirii din starea **REFRESH-**

KEY, primul caracter citit este primul caracter din cheie. Existența stării de **ERROR** asigură oprirea mașinii în cazul în care (pe diagramă [Fig 6.]) nu există o funcție de tranziție definită.

Încercând pe mașina de simulare [Fig. 7-10] acest model, observăm că într-adevăr funcționează pe inputul exemplu „TURING=SECRET” și la criptare, și la decriptare:



Figura 7. Simularea encriptării textului cu inputul inițial pe bandă

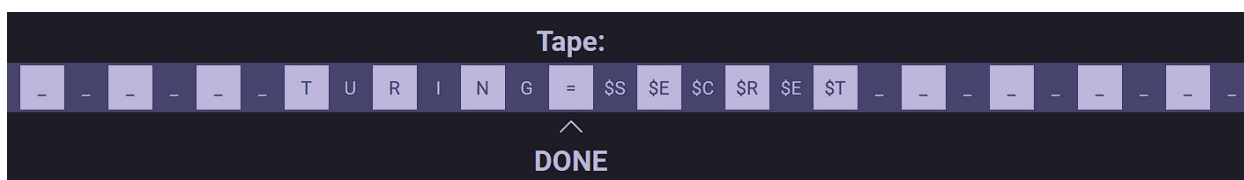


Figura 8. Rezultatul encriptării aflat pe bandă

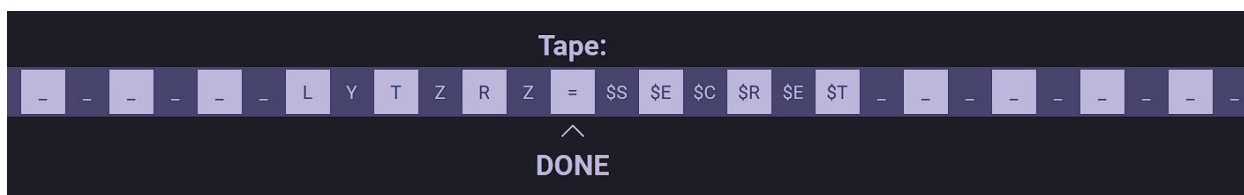


Figura 9. Simularea decriptării textului cu inputul inițial pe bandă

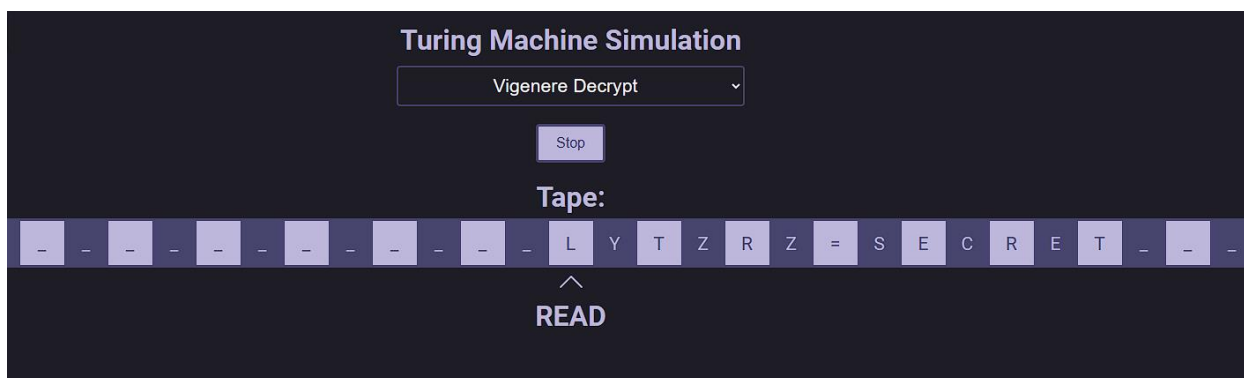


Figura 10. Rezultatul decriptării aflat pe bandă

CONCLUZII ȘI PROPUNERI

În concluzie am reușit să transformăm doi algoritmi simpli de criptare / decriptare într-o mașină Turing. Putem observa că acest lucru nu este ușor și depinde mult de complexitatea algoritmului. Mașinile Turing nu au fost concepute pentru computație rapidă [1,2,3], și nu sunt eficiente, însă conceptul lor de a fi în stare să conțină logica oricărui calculator programabil ne ajută să înțelegem un concept abstract între matematică și componente electronice.

Scopul acestei lucrări a fost de a parcurge pașii prin care un program oarecare ar putea fi implementat într-o mașina Turing.

Înțelegând aceste concepte de traducere ale unor iterații în cicluri cu stări finite a condus echipa lui Alan Turing în construirea unei mașini care a putut decipta într-o modalitate brute-force codul Enigma, folosit în al doilea război mondial. Mașina Bombe [7] era bazat pe o diagramă simplă a unei mașini Turing, care încerca diferite combinații de configurare a unui aparat Enigma.

Aplicația de simulare se poate accesa oricând pe website-ul meu de pe github:

<https://roland31x.github.io/TuringMachine/>

Codul sursă al acestei aplicații se găsește public tot pe github-ul meu:

<https://github.com/roland31x/TuringMachine/>

BIBLIOGRAFIE

- [1] University of Cambridge - <https://www.cl.cam.ac.uk/projects/raspberrypi/tutorials/turing-machine/one.html>
- [2] Stanford University - <https://plato.stanford.edu/entries/turing-machine/>
- [3] Cornell University - <https://www.cs.cornell.edu/courses/cs4820/2017sp/lectures/turingm.pdf>
- [4] Crypto-IT - <https://www.crypto-it.net/eng/simple/substitution-ciphers.html>
- [5] Michigan Technological University - <https://pages.mtu.edu/~shene/NSF-4/Tutorial/VIG/Vig-Base.html>
- [6] GraphViz - <https://graphviz.org/>
- [7] The National Museum of Computing - <https://www.tnmoc.org/bombe>

JOCUL DIDACTIC ÎN DEZVOLTAREA PSIHO-EMOȚIONALĂ A COPILULUI

Alina PARASCHIV

Inspectoratul Școlar al Municipiului București, Colegiul Național „Elena Cuza” București, profesor de matematică,
alina.paraschiv@ismb.ro

Rezumat: Jocul ca metodă se regăsește în anumite secvențe de învățare în majoritatea activităților matematice din grădiniță și la clasele primare. O activitate matematică bazată pe exercițiu cu material individual sau scris poate fi monotonă pentru copiii de 3-7 ani, dar profesorul poate să întrețină și să stimuleze interesul pentru activitate, introducând elemente cu caracter ludic. Astfel exercițiul devine dinamic, atractiv și stimulează participarea la activitate a copiilor. Chiar dacă este propusă copiilor o sarcină euristică, elementele de joc (competiția, surpriza, așteptarea) motivează participarea activă a copiilor.

Cuvinte cheie: joc didactic

Ca metodă, jocul realizează un scop și o sarcină din punct de vedere matematic și intervine în anumite secvențe de instruire, ca un ansamblu de acțiuni și operații ce se organizează sub o formă specifică dacă utilizează reguli de joc și introduce elemente de joc în vederea rezolvării unei situații problematice.

Utilizarea jocului accentuează rolul formativ al învățării matematicii prin:

- Exersarea operațiilor gândirii (analiza, sinteza, comparația, clasificarea);
- Dezvoltarea spiritului de observație, de inițiativă și imaginativ-creator;
- Dezvoltarea spiritului de competiție și de echipă;
- Formarea unor deprinderi de lucru corect și rapid;
- Însușirea cunoștințelor matematice într-o formă accesibilă și plăcută.

Introducerea metodei jocului în diferite etape ale demersului didactic conduce la un plus de eficiență formativă în planul cunoașterii, dezvoltă la copil atitudini afective și conduite conștiente de acțiune. În acest fel, cadrul didactic reușește să activeze copiii din punct de vedere cognitiv, operațional și afectiv, sporind gradul de înțelegere și participare activă a copilului la actul de învățare, să evidențieze modul de acțiune în diverse situații, să formeze deprinderi de interacțiune a copiilor în cadrul grupului și, nu în ultimul rând, contribuie la formarea deprinderilor de autocontrol a conduitelor operatorii și a achizițiilor cognitive ale copiilor.

Este foarte importantă ponderea pe care o acordă cadrul didactic jocului, ca metodă în cadrul strategiei alese, căci, în funcție de complexitatea obiectivelor, opțiunea pentru una sau alta dintre metodele specifice impune respectarea unor criterii de selecție în așa fel încât metoda aleasă:

- Să asigure realizarea obiectivelor proiectate;
- Să angajeze copilul în activitate directă de asimilare a conținutului;
- Să permită formarea capacităților de autoevaluare;
- Să realizeze echilibrul între metode și mijloacele de învățământ utilizate;
- Să asigure o raționalizare a timpului și efortului, deci o optimizare a învățării.

Activitatea pe bază de joc didactic matematic îndeplinește funcții educaționale variate. Astfel, la grupa mică, jocul didactic are rol de exersare a capacităților de identificare și satisface cel mai bine tendința spre acțiune, specifică copiilor de 3-4 ani. Prin joc didactic se asigură efectuarea, în mod independent, a unor acțiuni obiectuale, se stimulează descoperirea prin acțiune a unor proprietăți care, valorificate și îmbogățite, vor conduce treptat spre însușirea unor noi cunoștințe matematice. La 4-7 ani, jocul didactic dobândește o nouă funcție, aceea de consolidare și verificare a cunoștințelor, deprinderilor și priceperilor însușite de copii și constituie, în același timp, un mijloc eficient de verificare pentru cadrul didactic.

Caracteristica de bază a acestei forme de activitate o constituie prezența elementelor de joc în cadrul fiecărei secvențe didactice, iar specificul jocului este dat de componentele sale și de structură. Organizarea unui joc didactic are câteva elemente importante:

- Scopul didactic se formulează prin raportare la competența specifică și obiectivele operaționale și acest fapt va determina finalități funcționale în joc. Formularea scopului trebuie să fie clară pentru a asigura organizarea și desfășurarea corectă a activității.
- Sarcina didactică este legată de conținutul și structura jocului și reprezintă elementul de instruire ce se realizează prin antrenarea operațiilor gândirii. Sarcinile didactice sunt formulate în funcție de conținutul activităților matematice și de nivelul de vârstă.
- Elementele de joc se articulează cu sarcina didactică, au rolul de a mijloci realizarea ei în cele mai bune condiții și constituie elementele de susținere a atenției pe parcursul situației de învățare. Elementele de joc pot fi dintre cele mai variate: întrecere, recompensă, penalizare, aplauze etc.
- Conținutul matematic trebuie să fie prezentat într-o formă accesibilă și atractivă prin sarcinile de joc, materialele didactice utilizate și volumul de cunoștințe matematice la care se apelează.
- Materialul didactic trebuie să fie variat, adecvat conținutului (fișe individuale, cartonașe cu imagini sau desene, jetoane, jucării etc.)
- Regulile realizează legătura dintre sarcina didactică și acțiunea jocului. Fiecare joc didactic are cel puțin două reguli: prima regulă traduce sarcina didactică într-o acțiune concretă, atractivă și, astfel, exercițiul este transpus în joc. A doua regulă are rol organizatoric și precizează momentul când trebuie să înceapă sau să se termine o anumită acțiune a jocului, ordinea intrării în joc.

Gradul de realizare a sarcinii didactice și calitatea execuției constituie obiectul evaluării formative.

Desfășurarea jocului didactic cuprinde următoarele etape:

- Introducerea în joc;
- Prezentarea materialului didactic;
- Precizarea titlului și scopul jocului;
- Explicarea și demonstrarea regulilor jocului;
- Fixarea regulilor;
- Demonstrarea jocului de către cadrul didactic sau 1-2 copii;
- Executarea jocului de probă;
- Executarea jocului de către copii;
- Complicarea jocului, introducerea unor noi variante;;
- Încheierea jocului și evaluarea performanțelor individuale sau de grup.

Caracteristicile de ordin metodic ale organizării activităților matematice sub formă de joc sunt date din conținutul noțional exersat și de nivelul de vârstă al copiilor.

Jocurile didactice matematice de formare de mulțimi au aceeași structură generală, dar sarcina de învățare implică exerciții de imitare, grupare, separare, triere, clasificare și organizarea acestor tipuri de jocuri are ca scop dobândirea de către copii a abilităților de identificare, triere, selectare și formare de mulțimi.

Jocurile didactice matematice de numerație contribuie la consolidarea și exersarea deprinderilor de așezare în perechi, comparare, numărare conștientă, de exersare a proprietății cardinale și ordinale, de familiarizare cu operațiile aritmetice și de formare a raționamentelor de tip ipotetico-deductiv.

Jocurile logico-matematice introduc, în verbalizare, conectorii și operațiile logice și urmăresc formarea abilităților pentru elaborarea judecăților de valoare și de exprimare în limbaj logic

Organizarea activităților matematice sub forma jocului didactic realizează modificări semnificative atât în conținutul, dar și în calitatea proceselor cognitive. Prin joc, activitatea matematică devine mijloc de formare intelectuală, căci jocul face trecerea în etape de la acțiunea practică spre acțiunea mintală, favorizează dezvoltarea imaginației de tip reproductiv și creator, realizează trecerea de la reproducerea imitativă la combinarea reprezentărilor din imagini.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Jinga, I., Negreț, I. (1994), *Învățare eficientă* , Ed. Editis
- [2] Neacșu, I. (1988), *Metodica predării matematicii la clasele I-IV*
- [3] Neagu, M. Beraru, G. (1996), *Activități matematice în grădiniță* , Ed. Didactică și Pedagogică
- [4] Piaget, J. (1976), *Construirea realului la copil* , Ed. Didactică și Pedagogică

STUDIUL UNOR PROBLEME DE ECHILIBRU MECANIC DIN PUNCT DE VEDERE GEOMETRIC

Alina PARASCHIV¹, Alice ANGHELESCU²

¹Inspectoratul Școlar al Municipiului București, Colegiul Național „Elena Cuza” București, profesor de matematică, alina.paraschiv@ismb.ro

²Colegiul Național „Iulia Hasdeu” București, profesor de matematică, alicee_dag@yahoo.com

Rezumat: În această lucrare dăm o soluție geometrică pentru o problemă de echilibru mecanic și anume pentru o bară care este atârnată de 2 fire dintr-un punct fix. În ciuda faptului că majoritatea problemelor de modelare inginerescă sunt rezolvate folosind analiza matematică, vom reduce soluția problemei noastre la determinarea coordonatelor unui anumit punct din sistemul de coordonate carteziene. Mai mult, vom găsi valoarea forțelor care apar în fire. Sunt oferite unele generalizări. Noțiunile mecanice sunt minime și vor fi menționate la început și se vor folosi câteva rezultate geometrice foarte simple, cum ar fi teorema bisectoarei, teorema sinusurilor, congruența unghiurilor pe tot parcursul lucrării. Forțele care nu sunt luate în considerare în problemă sunt considerate neglijabile.

Cuvinte cheie: punct de echilibru mecanic, unghiuri congruente, bisectoare

INTRODUCERE

Analiza matematică este o componentă esențială a culturii științifice a oricărui cercetător, deoarece, alături de aspectul informațional, dezvoltă abilități de calcul, (fiecare teoremă principală fiind legată de evaluări numerice) oferind numeroase exemple de modelare matematică a unor fenomene ingineresti, și și-a extins permanent obiectul de studiu prin dezvoltarea de noi concepte. În corelație cu tehnicile moderne de calcul, a rezolvat probleme care erau inaccesibile până de curând. A rămas o disciplină fundamentală pentru învățământul tehnic și un domeniu științific cu numeroase ramificații. Dovada majorității principiilor ingineriei este conturată prin derivate, integrale - indicatori reali pentru descrierea multor evoluții de-a lungul timpului. Este o disciplină relativ modernă având originea abia în secolul al XVII-lea, în urma unor dezvoltări precum cele ale lui I. Newton, Leibniz și Pierre de Fermat în domeniul calculului.

Dar analiza matematică nu ar fi putut fi construită dacă Geometria și Aritmetica nu ar fi existat înainte. Geometria și Aritmetica reprezintă cele mai vechi „științe matematice” având originea cu mai bine de 2500 de ani în urmă, când egiptenii știau deja că triunghiul cu 3,4,5 unități de lungime este drept și grecii au avut diverse descoperiri experimentale pe care le-au sintetizat în teoreme și demonstrații. Lui Euclid îi datorăm tratatul „Elemente”, unde sunt sintetizate rezultate privind dimensiunile, asemănarea triunghiurilor, patrulaterelor, cercurilor. Cel care a combinat primul matematica cu fizica a fost Arhimede, descoperind legea pârgărilor și legea corpurilor plutitoare, unind Geometria și Mecanica și deschizând „jocul cu infinitul”. Pentru mai multe detalii, se poate consulta [1-5] etc. Folosind modelul marelui Arhimede, în această lucrare vom rezolva o problemă de echilibru mecanic, implicând simultan geometria euclidiană, trigonometria și geometria analitică.

Noțiuni preliminare

În această secțiune prezentăm câteva noțiuni și rezultate preliminare de mecanică și geometrie care vor fi utilizate pe tot parcursul lucrării.

1. Noțiuni preliminare de mecanică

Teorema 1. (A doua lege a mișcării lui Newton). Modificarea mișcării unui obiect este proporțională cu forța imprimată și se face în direcția drepte în care este imprimată forța..

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

Remarca 1. O condiție de echilibru este dată de $\vec{F} = 0$

Definiția 1. Având un punct O numit *pol*, definim impulsul forței F în raport cu O vectorul

$$M_o' = OP \times F, \quad (2)$$

unde P este punctul de aplicare al forței F .

Remarca 2. Dacă $M_o = 0$, atunci fie forța acționează în direcția de OP sau $F' = 0$.

Remarca 3. O stare de echilibru a unui corp este dată de $M_o(S) = 0$, unde S reprezintă rezultanta forțelor care acționează asupra corpului.

Pentru multe informații despre noțiunile mecanice de mai sus se poate consulta [2-5].

2. Noțiuni preliminare de geometrie

Teorema 2. (teorema cosinusurilor) Folosind Fig. 1 teorema cosinusului spune:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma$$

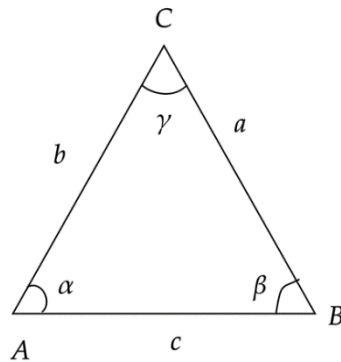


Figura 1. A triunghi

Teorema 2. (teorema bisectoarei) Într-un triunghi $\triangle ABC$, bisectoarea unghiului A determină pe partea opusă (BC) segmente proporționale cu laturile unghiului:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{CA}$$

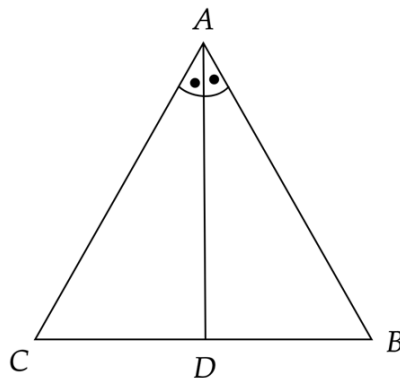


Figura 2. Un triunghi cu bisectoarea unui unghi

Teorema 4. Unghiurile vertical opuse sunt congruente.

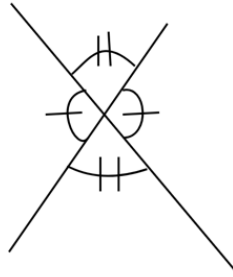


Figura. 3 Unghiuri opuse

Teorema 5. Într-un romb unghiurile opuse sunt congruente.

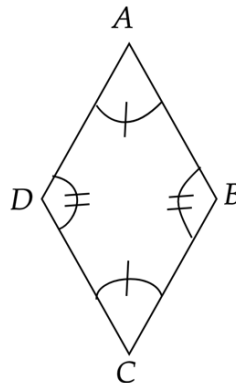


Figura 4. Romb

Pentru multe informații despre noțiunile de geometrie de mai sus se poate consulta [1].

3. O problemă de echilibru mecanic

Această secțiune reprezintă partea principală a lucrării, prezentând o problemă de echilibru mecanic: „pendulul” a cărei soluție va fi dată prin tehnici geometrice.

3.1. Pendulul

Considerăm o bară neomogenă AB , de lungime l . Bara este în echilibru, având capetele legate printr-un fir inextensibil, flexibil, fără greutate, de lungime L , care trece, fără frecare, printr-un punct fix O , situat în afara barului. Găsiți poziția de echilibru a barei și mărimea forțelor de legare (forțele de tensiune), știind că forțele de tensiune sunt aplicate în punctele A și B , având mărimi egale, iar poziția centrului de greutate este dată de punctul D , care împarte bara în raport

$$\frac{AD}{DB} = \frac{a}{b} = k$$

Soluție. În primul rând, construim $AE \perp OD, BF \perp OD$, prin urmare $AE \parallel BF$ și $\angle EAD = \angle DBF := \alpha$.

Fie ϕ unghiul format de OD și greutatea barei.

Translatăm cele două forțe de tensiune astfel încât punctul lor de aplicare să fie O iar apoi construim rombul $OPQR$ cu $|OP| = |T_B|$ și $|OR| = |T_A|$.

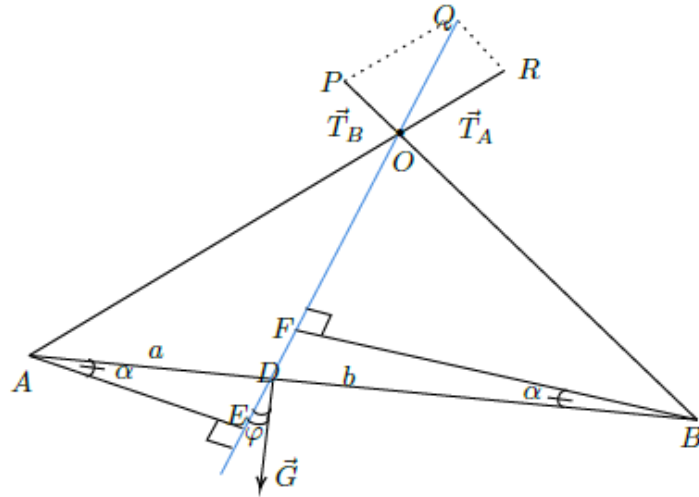


Figura 5. Schema băii

Notăm cu S rezultanta forțelor care acționează asupra barei și este dată de T_A, T_B, G .

Pentru că bara este în echilibru, atunci $T_A + T_B + G = 0$ și $M_O(S) = 0$, adică $M_O(T_A) + M_O(T_B) + M_O(G) = 0$ și deducem că $G \in (OD)$ și $\phi = 0$, ceea ce presupune

$$OQ = -G \quad (3)$$

OQ este o bisectoare în romb, atunci OQ este bisectoare de asemenea pentru $\angle AOB$, prin urmare $\angle AOD = \angle BOD := \beta$.

Pentru a găsi soluția trebuie să determinăm coordonatele $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ iar noi vom alege sistemul de coordonate $x'Oy'$ astfel încât $OD := Oy'$ și $Ox' \perp Oy'$.

Deoarece $AE \perp Oy'$, respectiv $BF \perp Oy'$, rămâne de determinat unul dintre unghiuri α sau β .

Dar găsirea măsurii unuia dintre aceste unghiuri implică determinarea celuilalt, deoarece:

$$b \cos \alpha = OB \sin \beta \quad (4)$$

(din $\triangle ODB$).

Aplicând teorema bisectoarei în $\triangle AOB$ obținem

$$\frac{OB}{OA} = \frac{DB}{DA} = \frac{b}{a} \quad \frac{OB}{OB+OA} = \frac{b}{b+a} \quad \frac{OB}{L} = \frac{b}{l} \quad (5)$$

$$\text{și analog} \quad \frac{OA}{OB} = \frac{DA}{DB} = \frac{a}{b} \quad \frac{OA}{OB+OA} = \frac{a}{b+a} \quad \frac{OA}{L} = \frac{a}{l}.$$

Din relația (4) deducem că

$$\cos \alpha = \frac{L}{l} \sin \beta.$$

Alegem să determinăm β .

Aplicând Teorema 2 în $\triangle AOB$, avem:

$$|OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB|\cos 2\beta = |AB|^2$$

iar din (5), rezultă

$$\frac{a^2 L^2}{l^2} + \frac{b^2 L^2}{l^2} - 2 \frac{ab L^2}{l^2} \cos 2\beta = (a+b)^2,$$

de unde

$$\cos 2\beta = \frac{L^2(a+b)^2 - l^4}{2L^2 ab}$$

și obținem că

$$\cos^2 \beta = \frac{l^2 \left(1 - \frac{l^2}{L^2} \right)}{4ab} = \frac{(a+b)^2}{4ab} \left(1 - \frac{l^2}{L^2} \right) = \left(\frac{a}{4b} + \frac{b}{4a} + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{l^2}{L^2} \right).$$

Notând cu $\frac{a}{b} := k, \frac{l}{L} := K$ avem

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{4} \cdot \frac{k^2 + 1}{k} (1 - K^2).$$

Prin urmare, deducem că $\angle \beta$ depinde numai de k și K . Astfel, găsim x_A, y_A, x_B, y_B .

Pentru a afla amplitudinea lui $|T_A|$ aplicăm teorema cosinusurilor și obținem

$$|\vec{G}|^2 = 2|\vec{T}_A|^2 - 2\cos(\pi - 2\beta)|\vec{T}_A|^2 = 4|\vec{T}_A|^2 \cos^2 \beta \quad |\vec{T}_A| = \frac{|\vec{G}|}{2\cos\beta}.$$

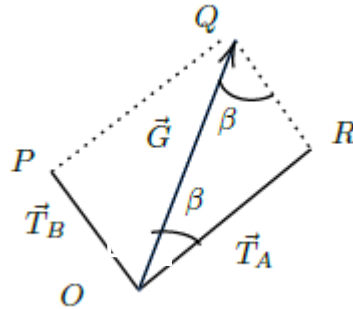


Figura 6. Forțele de legare

3.2. Condiții privind existența soluției

Am dat o soluție pentru problema noastră, dar știm că trebuie să răspundem la următoarea întrebare: este posibil ca punctul de echilibru să nu existe? Am început rezolvarea problemei prin impunerea unor condiții mecanice de echilibru și am ajuns la unele rezultate în formă trigonometrică. Desigur, condițiile privind existența punctului de echilibru trebuie să satisfacă existența cosinusului lui $\cos 2\beta$ și a triunghiului $\triangle AOB$.

Remarca 4. $0 < \cos 2\beta < 1$, adică $\angle AOB < 90^\circ$, prin urmare $\triangle AOB$ este ascuțit.

Remarca 5. Având $\triangle AOB$, înseamnă că $|OA| + |OB| > |AB| = l$ și $||OA| - |OB|| < |AB| = l$.

4. O generalizare

Remarca 6. Este bine cunoscut faptul că imaginea geometrică a unui produs cartezian a două intervale $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ (presupunând $a_1 < a_2, b_1 < b_2$, dar nu e necesar) reprezintă un dreptunghi de laturi $a_2 - a_1$ și $b_2 - b_1$, de trei intervale $\triangle DOB$ este un paralelipiped dreptunghiular a.s.o. Poate fi generalizat la un produs cartezian al unui număr finit de intervale obținând un dreptunghi n-dimensional.

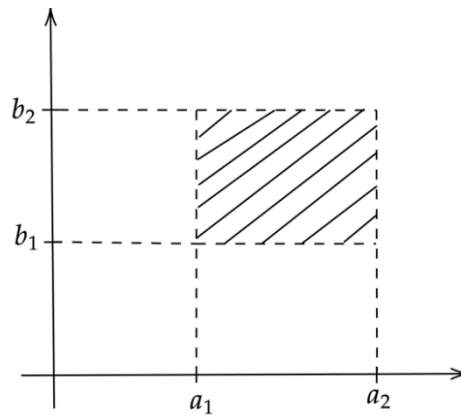


Fig. 6 – Un dreptunghi bidimensional

Problema din secțiunea 3 a prezentat o bară având doar lungime, adică era o problemă unidimensională. O anumită generalizare ar fi să luăm în considerare o bară cu zonă, adică o bară bidimensională, ceea ce înseamnă că bara devine o placă dreptunghiulară. Placa ar fi atârnată de 4 fire și pot fi considerate 2 cazuri: o placă omogenă și o placă neomogenă (caz în care este dată poziția centrului de masă). Carcasa plăcii omogene poate fi tratată cu ușurință în același mod ca problema prezentată în secțiunea 3 împărțind-o în două bare unidimensionale (adică DB și AC), cu un centru de greutate comun. Deoarece placa este omogenă, centrul său de greutate G va fi la intersecția lor.

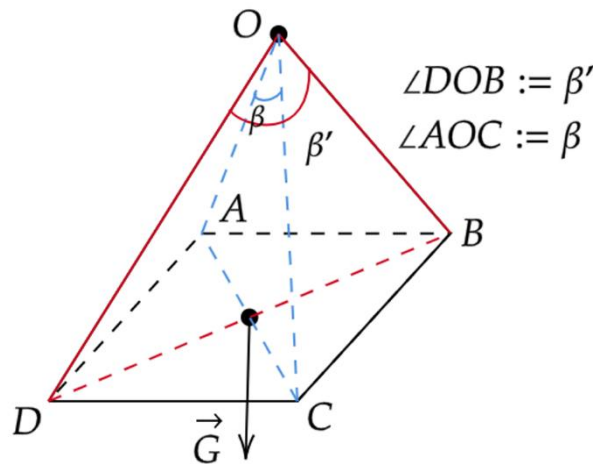


Figura 7. O placă omogenă agățată de 4 fire

În cazul unei plăci neomogene, trebuie să echivalăm placa cu două bare neomogene, astfel încât centrul de greutate al plăcii să coincidă cu centrul de greutate al sistemului de bare. Acest lucru este posibil.

CONCLUZII

În viitor ne propunem să rezolvăm generalizarea problemei pentru cazul unui paralelipiped dreptunghic, adică o cutie goală umplută omogenă sau neomogenă.

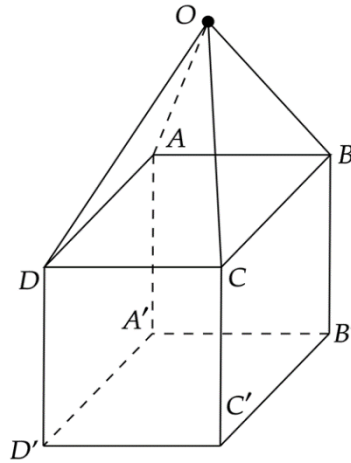


Figura 8. O cutie goală omogenă

BIBLIOGRAFIE

- [1] Berger, M. (2009). *Geometry I*, Springer Science & Business Media
- [2] Cleja-Țigoiu, S., Țigoiu, V. (2017). *Reologie*, Editura Universității din București
- [3] Dragoș, L. (1976). *Principiile mecanicii analitice*, Editura Tehnică
- [4] Hill, T. L. (2013). *Statistical mechanics: principles and selected applications*, Courier Corporation
- [5] Reddy, J. N. (2017). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*, John Wiley & Sons

O CĂUTARE PE WEB MAI RAPIDĂ, CU AJUTORUL AUTOMATULUI FINIT DETERMINIST

George-Daniel PECHERLE¹, Marian DEGERATU²

¹ Student anul II, Informatică, Facultatea de Științe, Universitatea din Oradea, george.pecherle@gmail.com

² Lect. univ. dr. Departamentul de Matematică și Informatică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea, degeratu.marian@gmail.com

Rezumat: În această lucrare ne propunem să folosim transformarea unui automat finit nedeterminist în automat finit determinist, cel din urmă fiind automatul de care se folosește algoritmul Aho-Corasick, pentru căutarea eficientă a informațiilor pe internet.

Un automat finit nedeterminist (AFN) și un automat finit determinist (AFD) sunt două tipuri de mașini abstracte utilizate în teoria limbajelor formale și în informatică pentru a recunoaște și procesa limbaje formale.

Cuvinte cheie: automate finite, transformare AFN în AFD, algoritmul Aho-Corasick, motoare de căutare

INTRODUCERE

Cu toții am căutat cel puțin odată informații pe internet, într-un motor de căutare („browser”), dar v-ați întrebat vreodată cum funcționează căutarea atât de rapid, printre atâtea informații?

În acest articol demonstrăm viteza motoarelor de căutare, prezentând algoritmul de căutare Aho-Corasick, ce se bazează pe un automat finit determinist, lucru pentru care ne folosim de programul de transformare AFN-AFD dezvoltat de mine.

Pentru a înțelege aceste concepte avem nevoie de definițiile celor două automate, a metodei de transformare din AFN în AFD și a algoritmului Aho-Corasick, așa că am adăugat mai jos definițiile acestora.

O observație importantă e aceea că pentru căutare folosim șiruri de caractere („string-uri”), denumite cuvinte, din cadrul unui alfabet.

Automat finit nedeterminist (AFN):

Un AFN (figura 1) este un model matematic al unui sistem automat cu stări și tranziții între acestea, în care există posibilitatea ca o tranziție să ducă **la mai mult de o stare următoare** pentru un anumit simbol de intrare.

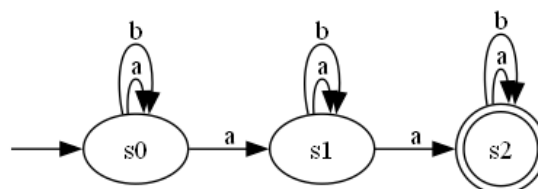


Figura 1. Exemplu de automat finit nedeterminist (AFN)

Fiecare stare a unui AFN poate avea zero, una sau mai multe tranziții pentru fiecare simbol din alfabet.

AFN-ul poate accepta sau respinge un șir de intrare, în funcție de starea finală în care ajunge după ce a procesat întregul șir. De exemplu AFN-ul din figura 1 acceptă cuvinte ce conțin minim două litere „a”, cuvintele cu mai puțin de două litere „a” fiind respinse.

Automat finit determinist (AFD):

Un AFD (figura 2) este un tip special de automat finit în care fiecare stare are **exact o tranziție** definită pentru fiecare simbol din alfabet.

Nu există ambiguitate în procesul de tranziție între stări într-un AFD, iar aceasta îl ușor de implementat și de înțeles.

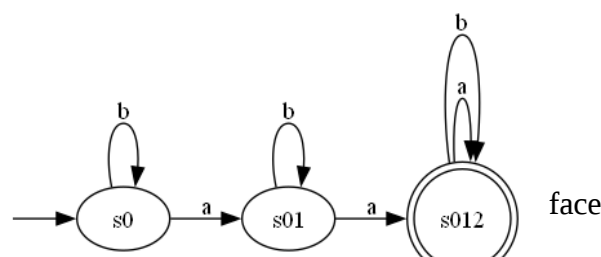


Figura 2. Exemplu de automat finit determinist

De asemenea, **viteza** de interpretare a unui AFD, de către calculator, este cu mult mai redusă, decât cea dată de recursia unui AFN.

Similar cu AFN-ul (figura 1), un AFD (figura 2), poate accepta sau respinge un șir de intrare, în funcție de starea finală în care ajunge după ce a procesat întregul șir. AFD-ul din figura 2 are un comportament similar cu AFN-ul din figura 1, dar este mai ușor de interpretat. Aceste automate au fost generate cu ajutorul programului dezvoltat de mine.

Având în vedere proprietățile prezentate mai sus, un AFD este superior unui AFN din punct de vedere al vitezei de interpretare, lucru care ne interesează în cazul de față.

Transformarea din AFN în AFD cu ajutorul închiderii epsilon:

Închiderea epsilon este o operație utilizată în teoria automatelor pentru a extinde un AFN pentru a-l face echivalent cu un AFD.

Ideea principală este de a găsi toate stările accesibile dintr-o anumită stare a AFN-ului, inclusiv stările accesibile prin tranziții epsilon (fără consum de simbol).

Prin calcularea închiderii epsilon pentru fiecare stare a AFN-ului și combinarea acestor informații, putem construi un AFD echivalent care recunoaște același limbaj ca și AFN-ul original.

Procesul de transformare a unui AFN într-un AFD implică adăugarea de stări și tranziții, prin combinarea celor anterioare, în AFD pentru a reprezenta această informație despre închiderea epsilon, iar rezultatul este un AFD care poate fi utilizat pentru a recunoaște același limbaj ca și AFN-ul inițial, dar cu o structură mai simplă și fără recursivitate.

Algoritmul Aho-Corasik

Algoritmul Aho-Corasik [2] este o metodă eficientă de căutare a unor șiruri de caractere („string-uri”) într-un text dat. Acesta poate căuta simultan mai multe cuvinte în text, indiferent de poziția lor în text. Din acest motiv căutarea se face foarte rapid, în timp liniar. În continuare se află o explicație detaliată a algoritmului, împreună cu legătura sa cu AFD:

Construcția unui Automat de Sufix (Trie):

Pasul inițial al algoritmului este construcția unui arbore de sufixe („trie”) pentru toate pattern-urile pe dorim să le căutăm în text.

Un arbore de sufixe este o structură de date care reprezintă toate sufixele unui set de cuvinte într-un mod eficient, permițând căutarea rapidă a acestora.

Construcția unui Automat de Căutare (Aho-Corasick):

Pe baza arborelui de sufixe, se construiește un automat de căutare eficient, cunoscut sub numele de "Automat Aho-Corasick" (figura 3).

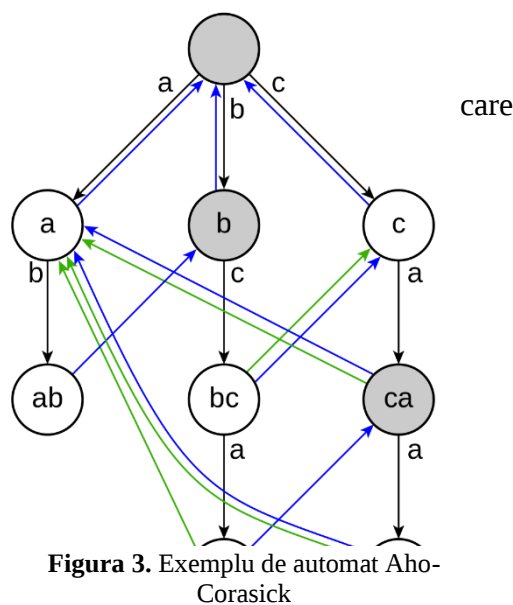
Automatul Aho-Corasick este o structură finită deterministă (AFD) extinsă, care permite căutarea tuturor pattern-urilor într-un text cu o singură traversare a acestuia.

Căutarea în Text folosind Automatul Aho-Corasick:

După construirea automatului, acesta poate fi utilizat pentru a căuta pattern-urile într-un text dat.

În timpul căutării, automatul se deplasează de-a lungul textului, făcând tranziții între stările sale în funcție de caracterele întâlnite la momentul respectiv în text.

Atunci când automatul ajunge într-o stare finală, se semnalează că unul sau mai multe pattern-uri au fost găsite în text și se identifică pozițiile acestora.



Construcția Automatului Aho-Corasick implică transformarea arborelui de sufixe într-un automat finit determinist (AFD) extins.

Automatul rezultat are o structură similară cu un AFD, dar este extins pentru a gestiona căutarea mai multor pattern-uri simultan (legăturile desenate cu verde sau albastru din figura 3).

Tranzițiile între stări în automatul Aho-Corasick corespund tranzițiilor între noduri în arborele de sufixe, iar funcționarea sa se bazează pe principiile automatelor finite deterministe.

Prin urmare, algoritmul Aho-Corasick oferă o modalitate eficientă de căutare a unor pattern-uri într-un text folosind un automat finit determinist extins, ceea ce îl face util pentru: procesarea textelor, analiza de securitate, analiza bioinformatică, etc.

Prin urmare, dacă avem un AFN, dar vrem să facem o căutare în text, pe baza acestuia, folosim programul de transformare în AFD, după care îl transformăm și interpretăm după modelul automatului Aho-Corasick, model după care obținem o viteză mare de căutare a cuvintelor, în text.

DEZVOLTAREA APLICAȚIEI LA NIVEL STRUCTURAL

Aplicația în care am implementat transformarea din automat AFN (figura 1) în AFD (figura 2) se numește „TransformareaAFN-AFD”, și are ca scop, după cum îi spune numele, de transformare și vizualizare a celor două automate.

Am ales să implementez aplicația în limbajul de programare *python*, pentru simplitatea codului, dar și pentru folosirea unor biblioteci predefinite pentru interfața de utilizator („tkinter”) sau pentru desenarea automatelor, ca grafuri, urmată de salvarea imaginilor obținute („graphviz”) [3].

Programul se instalează simplu, prin accesarea aplicației de instalare [4] („setup”), ca administrator, iar acesta e ușor de folosit prin intermediul interfeței de utilizator, unde se introduc datele AFN-ului ce trebuie desenat și transformat.

Un alt aspect important al aplicației este că, în timpul executării, salvează local imaginile celor două automate, cu extensia „png”, astfel, cele două imagini pot fi folosite de utilizator în scop didactic, ulterior.

La nivelul structurii aplicației, folosesc programarea orientată pe obiecte, astfel încât am definit clasa AFN și clasa AFD.

Un obiect creat din aceste clase este reprezentat de un automat, căruia i se atribuie valori pentru stări, alfabet, tranziții, stare inițială și stări finale. Aceste două clase au în comun proprietățile enumerate anterior, cât și o funcție de desenare, care se folosește de biblioteca „graphviz” [3] pentru a desena automatele ca grafuri, orientate, și de a salva mai apoi imaginile.

Clasa AFD, are metoda „accepta_cuvant”, care primește un cuvânt și verifică dacă este sau nu acceptat de automatul AFD respectiv.

Clasa AFN, față de clasa AFD, are metode specifice, precum „afn_in_afd”, „mutare” și „inchidere_epsilon”.

Metoda „afn_in_afd” primește ca parametru AFN-ul curent și întoarce în schimb un obiect AFD sinonim, în intermediul acesteia se fac toate mutările posibile între stări și gruparea stărilor corespunzătoare, până nu se mai obțin stări noi. Următoarele două metode ajutoare sunt esențiale:

Metoda „inchidere_epsilon” primește o serie de stări din AFN și întoarce o serie de stări în care se poate ajunge din stările inițiale, prin tranziții epsilon (tranziții care nu consumă simboluri, practic o teleportare între stări). Metoda „mutare” realizează mutări din starea actuală în stările imediat vecine.

CONCEPTE FOLOSITE

Faptul ca am creat clase pentru cele două automate, cu proprietăți și metode specifice, face codul ușor de integrat în alte proiecte, unde se pot suprascrie metodele existente sau se pot adăuga metode adiționale pentru automate, dacă este necesar. Așadar orice doritor poate accesa codul sursă și îl poate folosi foarte simplu.

De asemenea, am încercat să implementez programul pentru a fi cât mai ușor de citit, cu funcții cat mai scurte și denumiri ale variabilelor cât mai ușor de înțeles, în limba română. Pentru așezarea în pagină, pentru *python*, am folosit biblioteca „flake8” [5], care îmi atrage atenția astfel încât codul să fie în formatul universal acceptat, cu linii scurte de cod și spațiere corespunzătoare.

Constructorul automatelor este definit pentru a inițializa următoarele proprietăți (figura 4):

```
def __init__(self, stari, alfabet, tranzitii, stare_initiala, stari_finale):
    self.stari = stari
    self.alfabet = alfabet
    self.tranzitii = tranzitii
    self.stare_initiala = stare_initiala
    self.stari_finale = stari_finale
```

Figura 4. Metoda constructor pentru automate

MOD DE INSTALARE

Instalarea aplicației „TransformareAFN-AFD” se poate face pe orice dispozitiv cu Windows și se realizează prin descărcarea fișierului „transformare_AFN_AFD_setup.exe”, prin accesarea linkului de mai jos și selectarea opțiunii „view raw”, moment în care începe descărcarea.

https://github.com/Pechi23/TransformareAFN-AFD/blob/main/transformare_AFN_AFD_setup.exe

Pe parcursul descărcării și al instalării, antivirusul dumneavoastră vă va anunța că programul pe care doriți să-l accesați nu este dintr-o sursă cunoscută, astfel poate fi dăunător, dar continuați instalarea, ignorând aceste avertismente.

După ce ați descărcat programul de instalare pe dispozitivul dumneavoastră, dați click dreapta pe program și selectați opțiunea de al rula ca administrator („run as administrator”), moment în care începe instalarea.

Motivul pentru care trebuie rulat ca administrator este pentru că programul de instalare să aibă dreptul să adauge biblioteca „Graphviz” [3] la PATH, astfel, dacă nu-l rulați ca administrator, va fi necesar să adăugați pe cont propriu Graphviz la PATH în „environment variables”, pentru funcționarea aplicației.

MOD DE UTILIZARE

După instalare, aplicația de transformare se folosește simplu, prin completarea formularului ce citește date despre AFN-ul pe care vreți să-l transformați (de exemplu cel din figura 5), după care dați click pe „Submit”, moment în care imaginile automatelor apar mai jos.

Imaginile sunt salvate în folderul în care s-a instalat întreg programul, cel mai probabil în folderul „Program Files”.

Figura 5. Exemplu de completare a programului de transformare

CONCLUZIE

În concluzie, căutarea pe internet poate fi făcută rapid, folosind algoritmul de căutare Aho-Corasick, în detrimentul unei căutări obișnuite, mai lentă. Formarea structurii necesare pentru

aplicarea algoritmului, dintr-un AFN, se poate realiza transformarea lui, mai întâi într-un AFD, după care se interpretează ca automat Aho-Corasick.

Programul de transformare poate fi folosit de asemenea pentru a vizualiza anumite automate complicate, sau în scop didactic de către profesori, care le pot prezenta studenților anumite automate, iar mai apoi, automatele echivalente acestora.

Imaginile cu automate AFN și AFD prezente în articol au fost generate prin intermediul aplicației dezvoltate de mine.

Dacă sunteți interesați de modul în care am programat aplicația pentru transformarea AFD-AFN sau vreți să integrați în programele voastre automatele, puteți găsi proiectul, în mod public, pe profilul meu de GitHub:

<https://github.com/Pechi23/TransformareAFN-AFD>

BIBLIOGRAFIE

- [1] Automate finite - https://en.wikipedia.org/wiki/Deterministic_finite_automaton
- [2] Algoritmul Aho-Corasick
- https://en.wikipedia.org/wiki/Aho%E2%80%93Corasick_algorithm
- [3] Graphviz - <https://graphviz.org/>
- [4] Pyinstaller - <https://pyinstaller.org/>
- [5] Flake8 - <https://flake8.pycqa.org/en/latest/>

CALCULUL CARACTERISTICILOR NUMERICE ASOCIATE NUMERELOR FUZZY ÎN CAZUL NUMERELOR FUZZY LINIARE PE PORȚIUNI

Adrian Șerban RAȚ

Student anul III, Matematică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea
e-mail: adirat10@gmail.com

Rezumat: În literatura de specialitate sunt cunoscute diferite caracteristici numerice asociate numerelor fuzzy, precum valoarea de expectanță, intervalul de expectanță, ambiguitatea sau valoarea unui număr fuzzy. În această lucrare vom aborda problema calculului acestor caracteristici în cazul numerelor fuzzy liniare pe porțiuni.

Cuvinte cheie: număr fuzzy, valoare de expectanță, interval de expectanță, ambiguitatea unui număr fuzzy, valoarea unui număr fuzzy, număr fuzzy liniar pe porțiuni

INTRODUCERE

Din cauza complexității mediului înconjurător și a limitărilor cunoașterii umane, viața de zi cu zi este plină de informații incerte. Numerele fuzzy sunt o extensie a numerelor clasice, concepute pentru a gestiona incertitudinea în diverse aplicații. Ele sunt utilizate în principal în teoria fuzzy și logica fuzzy, care se ocupă de situațiile în care datele nu sunt precise sau sunt ambigue. În loc să atribuie un singur punct fix pentru a reprezenta o valoare, un număr fuzzy utilizează un interval de valori și o funcție de apartenență pentru a descrie gradul de adevăr sau probabilitatea fiecărei valori din interval. Aceasta permite o modelare mai flexibilă și realistă a fenomenelor din lumea reală, cum ar fi luarea deciziilor în condiții de incertitudine, controlul sistemelor complexe și procesarea informațiilor incomplete. Numerele fuzzy pot fi de diferite tipuri, cum ar fi interval, triunghiulare, trapezoidale, fiecare având aplicații și avantaje specifice în funcție de contextul utilizării. Cu toate acestea, în unele situații de aplicare, reprezentarea trapezoidală poate fi prea restrictivă. Astfel, pentru a evita limitarea reprezentărilor trapezoidale și pentru a îmbunătăți acuratețea, în [4], Coroianu, Gagolewski și Grzegorzewski au definit așa-numitele numere fuzzy liniare pe porțiuni cu un nod, care sunt suficient de simple și flexibile pentru a reconstrui conceptele fuzzy de intrare. Báez-Sánchez, Moretti și Rojas-Medar au introdus în [2] conceptul de număr fuzzy poligonal, iar mai apoi, Wang și Shen au propus în [7] metode de aproximare a numerelor fuzzy generale folosind un număr fuzzy liniar pe porțiuni cu noduri multiple.

1. Numere fuzzy liniare pe porțiuni

O mulțime fuzzy este o funcție $u: X \rightarrow [0,1]$. Pentru fiecare mulțime fuzzy u , notăm cu $[u]^r$ mulțimea sa de nivel r , unde $[u]^r = \{x \in X : u(x) \geq r\}$, $\forall r \in (0,1]$. Suportul mulțimii fuzzy u este $\text{supp } u = \{x \in X : u(x) > 0\}$. Prin $[u]^0$ înțelegem închiderea suportului lui u .

Definiție 1. (Diamond-Kloeden [6]) Dacă u este o mulțime fuzzy convexă pe $\square$, normală, superior semicontinuu în fiecare punct $x_0 \in \square$ și care are suport compact, atunci u se numește **număr fuzzy**.

Notăm cu E mulțimea tuturor numerelor fuzzy. Pentru $u \in E$, notăm intervalul închis $[u]^r = [\underline{u}(r), \bar{u}(r)]$, pentru orice $r \in [0,1]$.

Definiție 2. (Lv, Wang [8]) Fie $r = (r_0, r_1, \dots, r_{m+1})$, $s = (s_0, s_1, \dots, s_{n+1})$, $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_m < r_{m+1} = 1$, $1 = s_{n+1} > s_n > \dots > s_1 > s_0 = 0$. Pentru fiecare $A = (a_0, a_1, \dots, a_{m+1})$ și $B = (b_0, b_1, \dots, b_{n+1})$, cu $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{m+1} \leq b_{n+1} \leq \dots \leq b_1 \leq b_0$, numărul fuzzy u definit ca:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < a_0 \\ r_1 \frac{x-a_0}{a_1-a_0}, & \text{dacă } a_0 \leq x < a_1 \\ r_1 + (r_2 - r_1) \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, & \text{dacă } a_1 \leq x < a_2 \\ \dots \\ r_{m-1} + (r_m - r_{m-1}) \frac{x-a_{m-1}}{a_m-a_{m-1}}, & \text{dacă } a_{m-1} \leq x < a_m \\ r_m + (1-r_m) \frac{x-a_m}{a_{m+1}-a_m}, & \text{dacă } a_m \leq x < a_{m+1} \\ 1, & \text{dacă } a_{m+1} \leq x \leq b_{n+1} \\ s_n + (1-s_n) \frac{b_n-x}{b_n-b_{n+1}}, & \text{dacă } b_{n+1} < x \leq b_n \\ s_{n-1} + (s_n - s_{n-1}) \frac{b_{n-1}-x}{b_{n-1}-b_n}, & \text{dacă } b_n < x \leq b_{n-1} \\ \dots \\ s_1 + (s_2 - s_1) \frac{b_1-x}{b_1-b_2}, & \text{dacă } b_2 < x \leq b_1 \\ s_1 \frac{b_0-x}{b_0-b_1}, & \text{dacă } b_1 < x \leq b_0 \\ 0, & \text{dacă } x > b_0 \end{cases}$$

se numește $r-s$ **număr fuzzy liniar pe porțiuni**, notat prin $u_{pl} = PL(A^T, r^T; B^T, s^T)$.

Numim r mulțimea valorilor pragului stâng, iar s mulțimea valorilor pragului drept a numărului fuzzy liniar pe porțiuni u_{pl} . În cazul particular în care $r = s$, u_{pl} se va numi număr fuzzy liniar pe porțiuni cu $r(s)$ noduri.

Pentru $r_i, s_j \in [0,1]$ fixați, $0 = r_0 < \dots < r_{m+1} = 1 = s_{n+1} > s_n > \dots > s_0 = 0$, notăm mulțimea tuturor $r-s$ numerelor fuzzy liniare pe porțiuni cu ${}^r PL^s(E)$ și notăm cu $PL^r(E)$ mulțimea tuturor numerelor fuzzy liniare pe porțiuni cu $r(=s)$ noduri.

Conform [7], dacă $u \in {}^r PL^s(E)$, atunci:

$$\underline{u}(r) = \begin{cases} a_0 + (a_1 - a_0) \frac{r}{r_1}, & \text{dacă } r \in [0, r_1] \\ a_1 + (a_2 - a_1) \frac{r-r_1}{r_2-r_1}, & \text{dacă } r \in (r_1, r_2] \\ \dots \\ a_{m-1} + (a_m - a_{m-1}) \frac{r-r_{m-1}}{r_m-r_{m-1}}, & \text{dacă } r \in (r_{m-1}, r_m] \\ a_m + (a_{m+1} - a_m) \frac{r-r_m}{1-r_m}, & \text{dacă } r \in (r_m, 1] \end{cases}$$

și

$$\bar{u}(r) = \begin{cases} b_0 + (b_1 - b_0) \frac{r}{s_1}, & \text{dacă } r \in [0, s_1] \\ b_1 + (b_2 - b_1) \frac{r - s_1}{s_2 - s_1}, & \text{dacă } r \in (s_1, s_2] \\ \dots \\ b_{n-1} + (b_n - b_{n-1}) \frac{r - s_{n-1}}{s_n - s_{n-1}}, & \text{dacă } r \in (s_{n-1}, s_n] \\ b_n + (b_{n+1} - b_n) \frac{r - s_n}{1 - s_n}, & \text{dacă } r \in (s_n, 1] \end{cases}$$

pentru orice $r \in [0, 1]$.

Exemplu 1.

Dacă avem $r = (0, 0.3, 0.6, 0.9, 1)$, $s = (0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1)$, $A = (-1, -0.7, -0.5, -0.2, -0.1)$ și $B = (1, 0.9, 0.7, 0.5, 0.3, 0)$, atunci obținem funcția de apartenență a numărului fuzzy $u_{pl} = PL(A^T, r^T; B^T, s^T)$ ca:

$$u_{pl}(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < -1 \\ x + 1, & \text{dacă } -1 \leq x < -0.7 \\ 1.5x + 1.35, & \text{dacă } -0.7 \leq x < -0.5 \\ x + 1.1, & \text{dacă } -0.5 \leq x < -0.2 \\ x + 1.1, & \text{dacă } -0.2 \leq x < -0.1 \\ 1, & \text{dacă } -0.1 \leq x \leq 0 \\ 1 - \frac{2}{3}x, & \text{dacă } 0 < x \leq 0.3 \\ 1.1 - x, & \text{dacă } 0.3 < x \leq 0.5 \\ 1.1 - x, & \text{dacă } 0.5 < x \leq 0.7 \\ 1.1 - x, & \text{dacă } 0.7 < x \leq 0.9 \\ 2 - 2x, & \text{dacă } 0.9 < x \leq 1 \\ 0, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

Mulțimile de nivel r ale numărului fuzzy u_{pl} sunt:

$$\underline{u}(r) = \begin{cases} r - 1, & \text{dacă } r \in [0, 0.3] \\ \frac{2}{3}r - 0.9, & \text{dacă } r \in (0.3, 0.6] \\ r - 1.1, & \text{dacă } r \in (0.6, 0.9] \\ r - 1.1, & \text{dacă } r \in (0.9, 1] \end{cases}$$

și

$$\bar{u}(r) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}r, & \text{dacă } r \in [0, 0.2] \\ 1.1 - r, & \text{dacă } r \in (0.2, 0.4] \\ 1.1 - r, & \text{dacă } r \in (0.4, 0.6] \\ 1.1 - r, & \text{dacă } r \in (0.6, 0.8] \\ 1.5 - \frac{3}{2}r, & \text{dacă } r \in (0.8, 1] \end{cases}$$

2. Caracteristici numerice asociate numerelor fuzzy

Adesea, de exemplu pentru a ordona numere fuzzy sau a interpreta rezultatele obținute, este necesar să sintetizăm un număr fuzzy într-un număr real sau un interval de numere reale. Prezentăm în continuare câteva exemple de moduri în care se poate face aceasta.

3.1 Interval de expectanță

Intervalul de expectanță este o caracteristică foarte importantă a unui număr fuzzy, având multe proprietăți interesante și fiind util în numeroase situații, precum defuzificarea sau aproximarea numerelor fuzzy. Intervalul de expectanță a unui număr fuzzy u este introdus ca fiind:

$$EI(u) = \left[\int_0^1 \underline{u}(r) dr, \int_0^1 \bar{u}(r) dr \right]$$

3.2 Valoarea de expectanță

Punctul de mijloc al intervalului de expectanță se numește valoarea de expectanță a numărului fuzzy și este definit după cum urmează:

$$EV(u) = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \underline{u}(r) dr + \int_0^1 \bar{u}(r) dr \right)$$

Valoarea de expectanță a unui număr fuzzy u este o caracteristică de localizare, adică un punct care indică o valoare care este, într-un anumit sens, tipică pentru o noțiune fuzzy modelată de u .

3.3 Ambiguitatea

Ambiguitatea lui u poate fi văzută ca dispersia globală a funcției de apartenență a lui u . Prin urmare, ambiguitatea este o măsură a incertitudinii unui număr fuzzy, definită ca:

$$AMB(u) = \int_0^1 r (\bar{u}(r) - \underline{u}(r)) dr$$

3.4 Valoarea

O altă caracteristică de localizare a unui număr fuzzy este valoarea unui număr fuzzy și este definită prin următoarea formulă:

$$VAL(u) = \int_0^1 r (\underline{u}(r) + \bar{u}(r)) dr$$

3. Calculul caracteristicilor numerice pentru numere fuzzy liniare pe porțiuni

În această secțiune ne propunem să calculăm caracteristicile numerice prezentate în secțiunea 3, în cazul numerelor fuzzy liniare pe porțiuni. Aceasta este o problemă esențială în teoria numerelor fuzzy, deoarece aceste caracteristici sunt folosite în diverse aplicații precum analiza deciziilor, optimizarea și modelarea incertitudinilor

4.1 Valoarea de expectanță a numerelor fuzzy liniare pe porțiuni

Ținând cont de reprezentarea mulțimilor de nivel ale unui număr fuzzy liniar pe porțiuni (vezi Secțiunea 2), obținem:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \underline{u}(r) dr &= \sum_{i=0}^m a_i (r_{i+1} - r_i) + \sum_{i=0}^m (a_{i+1} - a_i) \frac{1}{r_{i+1} - r_i} \left(\frac{r^2}{2} - r_i r \right) \Big|_{r_i}^{r_{i+1}} \\ &= \sum_{i=0}^m a_i (r_{i+1} - r_i) + \sum_{i=0}^m (a_{i+1} - a_i) \frac{r_{i+1}^2 - r_i^2}{2(r_{i+1} - r_i)} - \sum_{i=0}^m (a_{i+1} - a_i) \frac{r_i}{r_{i+1} - r_i} (r_{i+1} - r_i) \\ &= \sum_{i=0}^m a_i (r_{i+1} - r_i) + \sum_{i=0}^m (a_{i+1} - a_i) \frac{r_{i+1} - r_i}{2} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^m (r_{i+1} - r_i) \frac{a_{i+1} + a_i}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^m (r_{i+1} - r_i) (a_{i+1} + a_i)$$

și

$$\int_0^1 \bar{u}(r) dr = \sum_{j=0}^n b_j (s_{j+1} - s_j) + \sum_{j=0}^n (b_{j+1} - b_j) \frac{1}{s_{j+1} - s_j} \left(\frac{r^2}{2} - s_j r \right) \Big|_{s_j}^{s_{j+1}}$$

$$= \sum_{j=0}^n b_j (s_{j+1} - s_j) + \sum_{j=0}^n (b_{j+1} - b_j) \frac{s_{j+1}^2 - s_j^2}{2(s_{j+1} - s_j)} - \sum_{j=0}^n (b_{j+1} - b_j) \frac{s_j}{s_{j+1} - s_j} (s_{j+1} - s_j)$$

$$= \sum_{j=0}^n b_j (s_{j+1} - s_j) + \sum_{j=0}^n (b_{j+1} - b_j) \frac{s_{j+1} - s_j}{2}$$

$$= \sum_{i=0}^m (s_{j+1} - s_j) \frac{b_{j+1} + b_j}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n (s_{j+1} - s_j) (b_{j+1} + b_j).$$

Propoziție 1. Dacă $u \in {}^r PL^s(E)$, atunci valoarea de expectanță a numărului fuzzy u este

$$EV(u) = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^m (r_{i+1} - r_i) (a_{i+1} + a_i) + \frac{1}{4} \sum_{j=0}^n (s_{j+1} - s_j) (b_{j+1} + b_j)$$

iar intervalul de expectanță se scrie sub forma:

$$EI(u) = \left[\frac{1}{2} \sum_{i=0}^m (r_{i+1} - r_i) (a_{i+1} + a_i), \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n (s_{j+1} - s_j) (b_{j+1} + b_j) \right].$$

Exemplu 2.

Calculând valoarea de expectanță și intervalul de expectanță a numărului fuzzy liniar pe porțiuni u_{pl} definit la exemplul 1, pe baza propoziției 1, obținem:

$$EV(u_{pl}) = 0.0125$$

și

$$EI(u_{pl}) = [-0.555, 0.58].$$

4.2 Ambiguitatea numerelor fuzzy liniare pe porțiuni

Asemănător cu calculul în cazul valorii de expectanță, ținând seama de reprezentarea din Secțiunea 2, obținem:

$$\int_0^1 r \cdot \underline{u}(r) dr = \sum_{i=0}^m \frac{a_i}{2} (r_{i+1}^2 - r_i^2) + \sum_{i=0}^m (a_{i+1} - a_i) \frac{1}{r_{i+1} - r_i} \left(\frac{r^3}{3} - r_i \frac{r^2}{2} \right) \Big|_{r_i}^{r_{i+1}}$$

$$= \sum_{i=0}^m \frac{a_i}{2} (r_{i+1} - r_i) (r_{i+1} + r_i) + \sum_{i=0}^m \frac{a_{i+1} - a_i}{r_{i+1} - r_i} \cdot \frac{r_{i+1}^3 - r_i^3}{3} - \sum_{i=0}^m \frac{a_{i+1} - a_i}{r_{i+1} - r_i} \cdot \frac{r_i}{2} (r_{i+1}^2 - r_i^2)$$

$$= \sum_{i=0}^m \frac{a_i}{2} (r_{i+1} - r_i) (r_{i+1} + r_i) + \sum_{i=0}^m \frac{a_{i+1} - a_i}{r_{i+1} - r_i} \cdot \frac{2(r_{i+1} - r_i)(r_{i+1}^2 + r_i^2 + r_i r_{i+1}) - 3(r_{i+1} - r_i)(r_{i+1} - r_i)r_i}{6}$$

$$= \sum_{i=0}^m \frac{a_i}{2} (r_{i+1} - r_i) (r_{i+1} + r_i) + \sum_{i=0}^m \frac{a_{i+1} - a_i}{6} \cdot (2r_{i+1}^2 - r_i^2 - r_i r_{i+1})$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=0}^m (r_{i+1} - r_i) \left[\frac{a_i}{2} (r_{i+1} + r_i) + \frac{a_{i+1} - a_i}{6} (2r_{i+1} + r_i) \right] \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{i=0}^m (r_{i+1}^2 - r_i^2) (3a_i + a_{i+1} - a_i) + \frac{1}{6} \sum_{j=0}^n r_{j+1} (a_{j+1} - a_j) (r_{j+1} - r_j) \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{i=0}^m \left[(r_{i+1}^2 - r_i^2) (a_{i+1} + 2a_i) + r_{i+1} (a_{i+1} - a_i) (r_{i+1} - r_i) \right]
 \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 r \cdot \bar{u}(r) dr &= \sum_{j=0}^n \frac{b_j}{2} (s_{j+1}^2 - s_j^2) + \sum_{j=0}^n (b_{j+1} - b_j) \frac{1}{s_{j+1} - s_j} \left(\frac{r^3}{3} - s_j \frac{r^2}{2} \right) \Big|_{s_j}^{s_{j+1}} \\
 &= \sum_{j=0}^n \frac{b_j}{2} (s_{j+1} - s_j) (s_{j+1} + s_j) + \sum_{j=0}^n \frac{b_{j+1} - b_j}{s_{j+1} - s_j} \cdot \frac{s_{j+1}^3 - s_j^3}{3} - \sum_{j=0}^n \frac{b_{j+1} - b_j}{s_{j+1} - s_j} \cdot \frac{s_j}{2} (s_{j+1}^2 - s_j^2) \\
 &= \sum_{j=0}^n \frac{b_j}{2} (s_{j+1} - s_j) (s_{j+1} + s_j) + \sum_{j=0}^n \frac{b_{j+1} - b_j}{s_{j+1} - s_j} \cdot \frac{2(s_{j+1} - s_j)(s_{j+1}^2 + s_j^2 + s_j s_{j+1}) - 3(s_{j+1} - s_j)(s_{j+1} - s_j)s_j}{6} \\
 &= \sum_{j=0}^n \frac{b_j}{2} (s_{j+1} - s_j) (s_{j+1} + s_j) + \sum_{j=0}^n \frac{b_{j+1} - b_j}{6} \cdot (2s_{j+1}^2 - s_j^2 - s_j s_{j+1}) \\
 &= \sum_{j=0}^n (s_{j+1} - s_j) \left[\frac{b_j}{2} (s_{j+1} + s_j) + \frac{b_{j+1} - b_j}{6} (2s_{j+1} + s_j) \right] \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{j=0}^n (s_{j+1}^2 - s_j^2) (3b_j + b_{j+1} - b_j) + \frac{1}{6} \sum_{j=0}^n s_{j+1} (b_{j+1} - b_j) (s_{j+1} - s_j) \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{j=0}^n \left[(s_{j+1}^2 - s_j^2) (b_{j+1} + 2b_j) + s_{j+1} (b_{j+1} - b_j) (s_{j+1} - s_j) \right].
 \end{aligned}$$

Propoziție 2. Dacă $u \in {}^r PL^s(E)$, atunci ambiguitatea numărului fuzzy u este:

$$AMB(u) = \frac{1}{6} \sum_{j=0}^n \left[(s_{j+1}^2 - s_j^2) (b_{j+1} + 2b_j) + s_{j+1} (b_{j+1} - b_j) (s_{j+1} - s_j) \right] - \frac{1}{6} \sum_{i=0}^m \left[(r_{i+1}^2 - r_i^2) (a_{i+1} + 2a_i) + r_{i+1} (a_{i+1} - a_i) (r_{i+1} - r_i) \right].$$

Exemplu 3.

Calculând ambiguitatea numărului fuzzy liniar pe porțiuni u_{pl} definit la exemplul 1, pe baza propoziției 2, obținem:

$$AMB(u_{pl}) = 0.4128.$$

4.3 Valoarea numerelor fuzzy liniare pe porțiuni

Ținând cont de calculul din secțiunea 4.2, obținem imediat următorul rezultat:

Propoziție 3. Dacă $u \in {}^r PL^s(E)$, atunci valoarea numărului fuzzy u este:

$$VAL(u) = \frac{1}{6} \sum_{j=0}^n \left[(s_{j+1}^2 - s_j^2) (b_{j+1} + 2b_j) + s_{j+1} (b_{j+1} - b_j) (s_{j+1} - s_j) \right] + \frac{1}{6} \sum_{i=0}^m \left[(r_{i+1}^2 - r_i^2) (a_{i+1} + 2a_i) + r_{i+1} (a_{i+1} - a_i) (r_{i+1} - r_i) \right].$$

Exemplu 4.

Calculând valoarea numărului fuzzy liniar pe porțiuni u_{pl} definit la exemplul 1, pe baza propoziției 3, obținem:

$$VAL(u_{pl}) = 0.0005.$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] Ban, A.I., Coroianu, L. (2016), *Symmetric triangular approximations of fuzzy numbers under a general condition and properties*. Soft Computing
- [2] Báez-Sánchez AD, Moretti AC, Rojas-Medar MA. (2012), *On polygonal fuzzy sets and numbers*. Fuzzy Sets and Systems
- [3] Bede, B. (2013), *Studies in Fuzziness and Soft Computing. In Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*, Springer: Berlin/Heidelberg, Germany
- [4] Coroianu, L., Gagolewski, M., Grzegorzewski, P. (2013), *Nearest piecewise linear approximation of fuzzy numbers*. Fuzzy Sets and Systems.
- [5] Coroianu, L., Gagolewski, M., Grzegorzewski, P. (2019), *Piecewise linear approximation of fuzzy numbers: Algorithms, arithmetic operations and stability of characteristics*. Soft Computing
- [6] Diamond, P., Kloeden, P. (2000), *Metric topology of fuzzy numbers and fuzzy analysis*. In: Dubois, D., Prade, H., et al. (eds.) Handbook Fuzzy Sets Ser., vol. 7, pp. 583–641. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht
- [7] Grzegorzewski P. (1998), *Metrics and orders in space of fuzzy numbers*. Fuzzy Sets and Systems
- [8] Lv, H., Wang, G. (2022), *Approximations of Fuzzy Numbers by Using r-s Piecewise Linear Fuzzy Numbers Based on Weighted Metric*. Mathematics
- [9] Wang, G., Shen, C., Wang, Y. (2020). *Approximation of fuzzy numbers by using multi-knots piecewise linear fuzzy numbers*. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems

GRUPURI FINITE. APLICAȚII

Adrian Șerban RAȚ

Student anul III, Matematică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea
e-mail: adirat10@gmail.com

Rezumat: În această lucrare am prezentat câteva noțiuni și rezultate de bază din teoria grupurilor finite, și anume: grupuri ciclice, ordinul unui element și proprietăți ale acestora. Ultima parte a lucrării conține câteva probleme de concurs, probleme care ilustrează cele prezentate în prima parte a lucrării.

Cuvinte cheie: grup finit, grup ciclic, ordinul unui element.

1. Grupuri finite. Ordinul unui element

Definiția 1. Fie $(G, \cdot)$ un grup și X o submulțime nevidă a sa. Notăm cu $\langle X \rangle = \bigcap \{H \mid X \subseteq H, H \leq G\}$ intersecția tuturor subgrupurilor lui G care îl conțin pe X . $(\langle X \rangle, \cdot)$ este un subgrup al lui G , numit subgrupul generat de mulțimea X .

Observații.

- $\langle X \rangle$ este cel mai mic subgrup (în raport cu relația de ordine $\subseteq$) al lui G , astfel încât $X \subseteq \langle X \rangle$.
- $\langle X \rangle = \{ \alpha \in G \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in X, \exists k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}, \alpha = x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n} \}$.
- Dacă $x \in G$, atunci subgrupul generat de elementul x este $\langle x \rangle = \{ x^k \mid k \in \mathbb{N} \}$.

Definiția 2. Grupul $(G, \cdot)$ se numește grup ciclic dacă există $x \in G$ astfel încât $\langle x \rangle = G$. În acest caz, elementul x se numește generator al grupului G .

Observație. Dacă $(G, \cdot)$ este un grup ciclic de ordinul n , a este un generator al grupului G și $k \in \mathbb{N}$, atunci a^k este un generator al lui G dacă și numai dacă $(n, k) = 1$.

Definiția 3. Grupul $(G, \cdot)$ se numește finit generat dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ și $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ astfel încât $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = G$. În acest caz, elementele $a_1, a_2, \dots, a_n$ se numesc generatori ai grupului G .

Observații.

- Orice grup ciclic este comutativ.
- Orice grup finit este finit generat.

Definiția 4. Fie grupul $(G, \cdot)$ cu elementul neutru e . Elementul $x \in G$ este de ordin finit, dacă există $m \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $x^m = e$. În acest caz, $\min \{ m \in \mathbb{N}^* \mid x^m = e \} = \text{ord}(x)$ se numește ordinul elementului x . Elementul $x \in G$ este de ordin infinit, dacă x nu este de ordin finit.

Teorema 5. Fie grupul $(G, \cdot)$ și elementul $x \in G$.

- Dacă $\text{ord}(x) = n \in \mathbb{N}^*$, atunci elementele $e, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ sunt distincte două câte două și $x^k = x^{k \pmod n}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$.
- $\text{ord}(x) = +\infty$ dacă și numai dacă avem $x^{k_1} \neq x^{k_2}$ pentru orice $k_1, k_2 \in \mathbb{N}, k_1 \neq k_2$.

Consecințe.

- Fie grupul $(G, \cdot)$. Dacă $x \in G$ și $\text{ord}(x) = n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\text{ord}(\langle x \rangle) = n$ și $\langle x \rangle = \{ e, x, x^2, \dots, x^{n-1} \}$.

- 2) Grupul finit G de ordinul $n \in \mathbb{N}^*$ este ciclic dacă și numai dacă G are un element de ordinul n .
- 3) Fie grupul $(G, \cdot)$. Dacă $x \in G$ și $\text{ord}(x) = n \in \mathbb{N}^*$ și $k \in \mathbb{N}$, $x^k = e$, atunci $n \mid k$.
- 4) Orice element al unui grup finit are ordinul finit.
- 5) Orice două grupuri ciclice de același ordin sunt izomorfe. Dacă G este un grup ciclic de ordinul n , atunci $(G, \cdot) \cong (\mathbb{Z}_n, +)$.
- 6) Orice subgrup al unui grup ciclic este ciclic.
- 7) Dacă $x, y \in G$, atunci:
 - a) $\text{ord}(x) = \text{ord}(x^{-1})$
 - b) $\text{ord}(x \cdot y) = \text{ord}(y \cdot x)$
- 8) Dacă $f: G \rightarrow G'$ este un morfism injectiv de grupuri multiplicative și $a \in G$, atunci $\text{ord}(a) = \text{ord}(f(a))$.
- 9) Fie grupul $(G, \cdot)$ și $a, b \in G$ cu $\text{ord}(a) = m \in \mathbb{N}^*$, $\text{ord}(b) = n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a \cdot b = b \cdot a$. Notăm cu $d = (m, n)$, $p = [m, n]$. Atunci:
 - a) $\text{ord}(a \cdot b) \mid p$
 - b) $\frac{p}{d} \mid \text{ord}(a \cdot b)$
- 10) Fie grupul $(G, \cdot)$ și $x \in G$, $\text{ord}(x) = n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:
 - a) Oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, $\text{ord}(x^k) \mid n$.
 - b) Oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, $\text{ord}(x^k) = \frac{n}{(k, n)}$.
- 11) Fie $(G, \cdot)$ un grup ciclic de ordinul n , $G = \langle a \rangle$ și $k \in \mathbb{N}$. Atunci a^k este generator al grupului dacă și numai dacă $(k, n) = 1$.
- 12) Dacă $(G, \cdot)$ un grup ciclic de ordinul p , $p \in \mathbb{N}$ număr prim, atunci:
 - a) Orice element al lui G este generator al grupului.
 - b) G nu are subgrupuri proprii.

Vom demonstra consecințele 3, 7, 8, 9, 10 și 11, celelalte fiind evidente:

Demonstrație.

3. Conform teoremei împărțirii cu rest, există și sunt unice $q, r \in \mathbb{N}$, cu $0 \leq r < \text{ord}(x)$, astfel încât $k = \text{ord}(x) \cdot q + r$. Atunci $x^k = x^{nq+r} = (x^n)^q \cdot x^r$, și cum $x^n = e$, rezultă că $x^k = x^r$ și deci $x^r = e$. Dar $n = \text{ord}(x) = \min \{m \in \mathbb{N}^* \mid x^m = e\}$, de unde rezultă că $r = 0$, deci $k = n \cdot q$, adică $n \mid k$.

7. a) I. Dacă $\text{ord}(x) = n \in \mathbb{N}^*$

Avem $x^n = e$ și $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1} = e^{-1} = e$. Fie $k = \text{ord}(x^{-1})$. Din consecința a treia rezultă $k \mid n$. Cum $e = (x^{-1})^k = (x^k)^{-1}$, rezultă că $x^k = e$ și cum $\text{ord}(x) = n$, din consecința 3 rezultă că $n \mid k$. Așadar $n = k$.

II. Dacă $\text{ord}(x) = +\infty$

Să presupunem că $\text{ord}(x^{-1}) = k \in \mathbb{N}^*$. Atunci din cazul anterior rezultă că $\text{ord}(x) = \text{ord}(x^{-1})^{-1} = k$, ceea ce este fals. Așadar, $\text{ord}(x^{-1}) = +\infty$.

b) I. Dacă $\text{ord}(x \cdot y) = n \in \mathbb{N}^*$

Avem $(x \cdot y)^k = e \Leftrightarrow x \cdot (y \cdot x)^{k-1} \cdot y = e \Leftrightarrow (y \cdot x)^k \cdot y = y$, echivalent cu $(y \cdot x)^k = e$. Așadar, $\text{ord}(y \cdot x) = k' \in \mathbb{N}^*$ și $k' \mid k$. Dar $(y \cdot x)^{k'} = e$ dacă și numai dacă $y \cdot (x \cdot y)^{k'-1} \cdot x = e \Leftrightarrow (x \cdot y)^{k'} = e$, și cum $\text{ord}(x \cdot y) = k$, rezultă $k \mid k'$. Deci $k = k'$.

II. Dacă $\text{ord}(x \cdot y) = +\infty$

Presupunând că $\text{ord}(y \cdot x) = k \in \mathbb{N}^*$ rezultă ca mai înainte că $\text{ord}(x \cdot y) = k$, ceea ce este fals. Așadar, $\text{ord}(y \cdot x) = +\infty$.

8. I. Dacă $\text{ord}(a) = k \in \mathbb{N}^*$

Avem $e' = f(a^k) = (f(a))^k$ și deci ordinul elementului $f(a) \in G'$ este finit. Fie $t = \text{ord}(f(a))$. Rezultă că $t \mid k$. Dar $e' = f(a^t) = (f(a))^t$ și pentru că f este o funcție injectivă, rezultă că $a^t = e$ și cum $\text{ord}(a) = k$, avem $k \mid t$. Deci $k = t$.

II. Dacă $\text{ord}(a) = +\infty$

Presupunem că $\text{ord}(f(a)) = k \in \mathbb{N}^*$. Atunci $(f(a))^k = e = f(a^k)$ și din injectivitatea lui f , rezultă că $a^k = e$, ceea ce este fals. Așadar, $\text{ord}(f(a)) = +\infty$.

9. Se știe că dacă $a \cdot b = b \cdot a$, atunci pentru orice $k \in \mathbb{N}$ avem $(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k$

a) Avem $m = d \cdot m_1$ și $n = d \cdot n_1$, cu $m_1, n_1 \in \mathbb{N}$, $(m_1, n_1) = 1$, iar $p = d \cdot m_1 \cdot n_1$.

$(a \cdot b)^p = (a \cdot b)^{d \cdot m_1 \cdot n_1} = a^{m \cdot n_1} \cdot b^{n \cdot m_1} = (a^m)^{n_1} \cdot (b^n)^{m_1} = e$, iar din consecința 3 rezultă $k \mid p$, unde $\text{ord}(a \cdot b) = k$ (evident că $\text{ord}(a \cdot b) \in \mathbb{N}^*$).

b) $\frac{p}{d} \mid m_1 \cdot n_1$. Demonstrăm că $m_1 \cdot n_1 \mid k$.

$(a \cdot b)^k = e \Rightarrow a^k = b^{-k} \Rightarrow a^{k \cdot n} = b^{-k \cdot n} = e$, de unde rezultă pe baza consecinței 3 că $m \mid k \cdot n \Leftrightarrow d \cdot m_1 \mid k \cdot d \cdot n_1 \Rightarrow m_1 \mid k \cdot n_1$. Dar $(m_1, n_1) = 1$, de unde rezultă că $m_1 \mid k$.

Analog rezultă că $n_1 \mid k$, și cum $(m_1, n_1) = 1$, obținem că $m_1 \cdot n_1 \mid k$.

10. a) $(x^k)^n = e$, de unde rezultă pe baza consecinței 3 că $\text{ord}(x^k) \mid n$.

b) Fie $d = (k, n)$. Atunci există $n_1, k_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = d \cdot n_1$, $k = d \cdot k_1$, cu $(n_1, k_1) = 1$. Cum $(x^k)^{n_1} = x^{n \cdot k_1} = e$ rezultă pe baza consecinței 3 că $\text{ord}(x^k) \mid n_1$. (1)

Fie $s = \text{ord}(x^k)$. Avem $x^{k \cdot s} = e$ și cum $\text{ord}(x) = n$, rezultă din consecința 3 că $n \mid k \cdot s \Rightarrow d \cdot n_1 \mid d \cdot k_1 \cdot s \Rightarrow n_1 \mid k_1 \cdot s$. Deoarece $(n_1, k_1) = 1$, rezultă că $n_1 \mid s$. Ținând cont de (1),

obținem că $n_1 = s$, adică $\text{ord}(x^k) = n_1 = \frac{n}{d} = \frac{n}{(k, n)}$.

11.

Lemă: Fie $k, n \in \mathbb{N}$. Atunci $(k, n) = 1 \Leftrightarrow \exists t, s \in \mathbb{N}$ astfel încât $k \cdot t + n \cdot s = 1$

„ $\Rightarrow$ ” Cum $\langle a^k \rangle = G$, există $t \in \mathbb{N}$ astfel încât $(a^k)^t = a$ și deci $a^{k \cdot t - 1} = e$. Rezultă din consecința 3 că $\text{ord}(a) = n \mid (k \cdot t - 1) \Rightarrow \exists s \in \mathbb{N}$ astfel încât $k \cdot t - 1 = s \cdot n \Leftrightarrow n \cdot (-s) + k \cdot t = 1 \Leftrightarrow (k, n) = 1$.

„ $\Leftarrow$ ” $(k, n) = 1 \Leftrightarrow \exists t, s \in \mathbb{N}$ astfel încât $k \cdot t + n \cdot s = 1$.

Atunci $a = a^{k \cdot t + n \cdot s} = (a^k)^t \cdot (a^n)^s = (a^k)^t$ și deci $a \in \langle a^k \rangle$ și cum grupul G este generat de a , rezultă că $G \subseteq \langle a^k \rangle$. Dar $\langle a^k \rangle \subseteq G$, deci $G = \langle a^k \rangle$. Să observăm că există $\varphi(n)$ generatori ai lui G .

2. Aplicații

Problema 1. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit. Dacă m și n sunt divizori ai ordinului grupului, atunci ecuațiile $x^m = 1$ și $x^n = 1$ au o singură soluție comună dacă și numai dacă $(m, n) = 1$.

Soluție. Observăm că $x = 1$ este o soluție comună a celor două ecuații.

" $\Leftarrow$ " Dacă $(m, n) = 1$, atunci există $u, v \in \mathbb{Z}$ astfel încât $m \cdot u + n \cdot v = 1$.

Dacă x_0 este o soluție comună a celor două ecuații, atunci avem $x_0^{mu} = 1$ și $x_0^{nv} = 1$, adică $x_0 = x_0^{mu+nv} = 1$.

" $\Rightarrow$ " Dacă $d = (m, n)$, atunci există $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $m \cdot a + n \cdot b = d$. Atunci soluția comună x_0 a celor două ecuații va fi soluție și a ecuației $x^d = 1$ și reciproc ($x_0^m = x_0^n = 1 \Rightarrow x_0^d = x_0^{ma+nb} = 1$). Dacă $d \geq 2$, atunci d are cel mult un divizor prim p . Atunci orice element de ordin p din G este soluție a ecuației $x^d = 1$. Cum există astfel de elemente în G , conform teoremei lui Cauchy, rezultă că ecuația $x^d = 1$ nu are soluție unică, ceea ce este în contradicție cu ipoteza. Așadar, rămâne doar cazul $d = 1$.

Problema 2. Dacă G este un grup cu 10 elemente în care există $a, b \in G \setminus \{1\}$ distincte, astfel încât $a^2 = b^2 = 1$, atunci G nu este abelian.

Soluție. Presupunem că G este grup abelian. Atunci $ab = ba$.

Considerăm $H = \{1, a, b, ab\}$. Deoarece G este presupus abelian, atunci $a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1$, $a \cdot (ab) = a^2b = b$ și $b \cdot (ab) = ab^2 = a$. Astfel, H este subgrup al lui G .

Din teorema lui Lagrange avem că $|H| \mid |G|$, adică $4 \mid 10$, ceea ce este fals. Așadar, presupunerea este falsă, deci G nu este grup abelian.

Problema 3. Dacă G este un grup comutativ de ordin n , atunci produsul celor n elemente ale lui G este egal cu produsul tuturor elementelor de ordin cel mult 2. Aplicând acest rezultat grupului multiplicativ $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$, dacă p este număr prim, atunci vom demonstra că $p \mid (p-1)! + 1$.

Soluție. Scriem $\prod_{x \in G} x = \left(\prod_{\substack{x \in G \\ o(x) > 2}} x \right) \cdot \left(\prod_{\substack{x \in G \\ o(x) \leq 2}} x \right)$ și vom demonstra că $\prod_{\substack{x \in G \\ o(x) > 2}} x = 1$.

Dacă $x \in G$ cu $o(x) > 2$, atunci $o(x) = o(x^{-1}) > 2$. Dar $x \neq x^{-1}$, căci în caz contrar ar rezulta că $x^2 = 1$. Astfel, în produsul $\prod_{\substack{x \in G \\ o(x) > 2}} x$ dacă apare un factor x , atunci apare și factorul x^{-1} , deci în acest

produs factorii se grupează doi câte doi (fiecare cu inversul său), de unde rezultă că produsul $\prod_{\substack{x \in G \\ o(x) > 2}} x = 1$, deci $\prod_{x \in G} x = \prod_{\substack{x \in G \\ o(x) \leq 2}} x$. Pentru a demonstra teorema lui Wilson, se ține cont de faptul că

singurele elemente din $\mathbb{Z}_p^*$ de ordin mai mic sau egal cu 2 (p număr prim) sunt 1 și $p-1 = -1$, deci conform celor de mai înainte $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p-1 = -1$, de unde rezultă că $p \mid (p-1)! + 1$.

Problema 4. Dacă p este un număr prim, $n \in \mathbb{N}^*$ și $U_{p^n} = \{z \in \mathbb{Z}_p^* \mid z^{p^n} = 1\}$, atunci:

- (i) $U_{p^0} \subset U_{p^1} \subset \dots \subset U_{p^n} \subset \dots \subset \square^*$;
 (ii) Dacă notăm $U_{p^\infty} = \bigcup_{n \geq 0} U_{p^n}$, atunci $U_{p^\infty} \leq (\square^*, \cdot)$;
 (iii) Dacă $H \leq (U_{p^\infty}, \cdot)$ este propriu, atunci există $n \in \square$ astfel încât $H = U_{p^n}$.

Soluție.

- (i) Notăm $H_n = U_{p^n}$ și $y_n = \cos \frac{2\pi}{p^n} + i \sin \frac{2\pi}{p^n}$, $n \in \square$.

Dacă $z \in H_n \Rightarrow z^{p^n} = 1 \Rightarrow z^{p^{n+1}} = (z^{p^n})^p = 1^p = 1$. Rezultă că $z \in H_{n+1}$, deci $H_n \subset H_{n+1}$. Incluziunea este strictă deoarece $y_{n+1} \in H_{n+1}$ și cum $y_{n+1}^{p^n} = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p} \neq 1 \Rightarrow y_{n+1} \notin H_n$.

- (ii) Rezultă imediat din (i)

- (iii) Fie $H \leq U_{p^\infty}$, $H \neq U_{p^\infty}$ și fie n cel mai mic număr natural pentru care $y_n \in H$ și $y_{n+1} \notin H$.

Vom demonstra că $H = H_n$.

Incluziunea $H \subseteq H_n$ este evidentă deoarece $H_n = \langle y_n \rangle$, iar $y_n \in H$.

Fie $z \in H \subset U_{p^\infty}$. Rezultă că există $m \in \square$ astfel încât $z \in H_m$. De unde rezultă că $o(z) \mid p^m \Rightarrow o(z) = p^r$, unde $0 \leq r \leq m$. Deci z este o rădăcină de ordin r a unității, de unde rezultă că $z = y_r^k$, cu $(k, p^r) = 1$.

Dacă $a, b \in \square$ astfel încât $a \cdot k + b \cdot p^r = 1 \Rightarrow y_r = y_r^{ak+bp^r} = (y_r^k)^a = z^a \in H$. Rezultă că $r \leq n$ și cum $H_r \subset H_n \Rightarrow z \in H_n \Rightarrow H \subseteq H_n \Rightarrow H = H_n$.

Problema 5. Dacă $(G, \cdot)$ este un grup finit și $f \in \text{Aut}(G)$, atunci f are un singur punct fix dacă și numai dacă funcția $F : G \rightarrow G$, $F(x) = x^{-1}f(x)$ este bijectivă.

Soluție.

" $\Rightarrow$ " Presupunem că f are un singur punct fix, și anume pe 1, elementul neutru al lui G , deoarece $f(1) = 1$.

Fie $F(x) = F(y)$. Rezultă că $x^{-1}f(x) = y^{-1}f(y)$, deci $f(x)(f(y))^{-1} = xy^{-1} \Rightarrow f(xy^{-1}) = xy^{-1} \Rightarrow xy^{-1} = 1 \Rightarrow x = y \Rightarrow F$ este injectivă. Dar cum G este grup finit, rezultă că F este surjecție. Așadar, F este bijectivă.

" $\Leftarrow$ " Fie F bijectivă. Dacă $x \in G \setminus \{1\}$ este un punct fix al lui f , atunci $f(x) = x$. Rezultă că $x^{-1}f(x) = 1 = 1^{-1}f(1) \Rightarrow F(x) = F(1) \Rightarrow x = 1$ deoarece F este injectivă.

Problema 6. Dacă $(G, \cdot)$ este un grup finit, $\text{card}(G) = n \in \square$, $n \geq 3$, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- $(G, \cdot)$ este grup comutativ
- $x^{n-1} \cdot y^{n-1} = (x \cdot y)^{n-1}$, $\forall x, y \in G$
- $x^{n-2} \cdot y^{n-2} = (y \cdot x)^{n-2}$, $\forall x, y \in G$

Soluție.

$i) \Rightarrow ii)$ și $i) \Rightarrow iii)$ sunt evidente

Au loc relațiile:

$$\text{card}(G) = n \Rightarrow a^n = e, \forall a \in G \Rightarrow a^{n-1} = a^{-1}, \forall a \in G$$

$$a^{n-2} = a^{-2}, \forall a \in G, \text{ unde } a^{-2} = (a^{-1})^2$$

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, \forall a, b \in G$$

ii) $\Rightarrow$ i)

Fie

$$x, y \in G.$$

Avem

$$xy = (x^{-1})^{-1}(y^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{n-1}(y^{-1})^{n-1} = (x^{-1}y^{-1})^{n-1} = (x^{-1}y^{-1})^{-1} = (y^{-1})^{-1}(x^{-1})^{-1} = yx, \text{ deci } (G, \cdot)$$

este grup comutativ.

iii) $\Rightarrow$ i)

$$\text{Fie } x, y \in G. \text{ Avem } x^{-1}x^{-1}y^{-1}y^{-1} = x^{-2}y^{-2} = x^{n-2}y^{n-2} = (yx)^{n-2} = (yx)^{-2} = ((yx)^{-1})^2 =$$

$$= (x^{-1}y^{-1})^2 = x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}. \text{ După simplificări obținem } x^{-1}y^{-1} = y^{-1}x^{-1}, \text{ de unde, prin inversare, rezultă că } yx = xy, \text{ deci } (G, \cdot) \text{ este grup comutativ.}$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] Fechete I., Fechete D. (2000), *Algebră*, Ed. Univ. Oradea
- [2] Ion I. D., Radu N. (1970), *Algebră*, Ed. Didactică și Pedagogică, București,
- [3] Ion D., Radu N., Nita C., Popescu D. (1991), *Probleme de algebră*, Editura Didactică și Pedagogică, București
- [4] Lazăr C. etc. (2008), *Matematică - Olimpiade și concursuri școlare*, Ed. Paralela 45, Pitești
- [5] Năstăsescu C., Niță C., Vraciu C. (1986). *Bazele algebrei*, vol. I., Ed. Academiei, București
- [6] Popescu D., Vraciu C. (1986), *Elemente de teoria grupurilor finite*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București
- [7] Purdea I., Pic Gh. (1977). *Tratat de algebră modernă*, vol. I, Editura Academiei, București
- [8] Purdea I., Pop I. (2003). *Algebră*, Editura GIL, Zalău
- [9] Purdea I., Pelea C. (2008). *Probleme de algebră*, Ed. Eikon
- [10] www.ssmr.ro/onm2024

ELEMENTE NILPOTENTE ȘI IDEMPOTENTE

Carmen RUSU

Liceul Teologic Penticostal Betel, Oradea, România, profesor de matematică, ocrusu@yahoo.com

Rezumat: Caracteristicile elementare ale inelelor legate de elementele nilpotente, elementele idempotente și divizorii lui zero pot conduce la aplicații interesante în studiul structurilor algebrice. Materialul are ca scop prezentarea câtorva astfel de situații. Conținutul acestuia va putea fi util atât elevilor cât și profesorilor care îi pregătesc pe aceștia pentru examenele naționale și concursurile școlare, dar și celor interesați în studiul inelelor.

Cuvinte cheie: element nilpotent, element idempotent, divizori a lui zero într-un inel

INTRODUCERE

Pentru a putea parcurge aplicațiile vom avea nevoie să prezentăm succint câteva noțiuni teoretice, definiții, propoziții și consecințe ale lor, fără a ne opri la demonstrarea acestora. Toate demonstrațiile se pot găsi în bibliografia indicată în acest articol precum și în alte culegeri și materiale de specialitate.

Definiția 1. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel.

1) Un element $x \in A$, $x \neq 0$ se numește *divizor al lui zero la stânga (la dreapta)*, dacă $\exists y \in A$, $y \neq 0$, astfel ca $xy = 0$ (respectiv $\exists y \in A$, $y \neq 0$ cu $yx = 0$).

Elementul $x \in A$, $x \neq 0$ se numește *divizor al lui zero*, dacă 0 este divizor al lui zero la stânga și la dreapta în orice inel nenul.

2) Inelul A are *divizori ai lui zero*, dacă A conține cel puțin un divizor al lui zero, în caz contrar, spunem că A nu are divizori ai lui zero sau că A este *inel integru*.

Definiția 2. Un inel nenul A comutativ cu element-unitate și fără divizori ai lui zero se numește *domeniu de integritate*.

Definiția 3. Fie A un inel.

1) Un element cu proprietatea $x^2 = x$ se numește *element idempotent* al lui A .

2) Un element $x \in A$ cu proprietatea că $\exists n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^n = 0$ se numește *element nilpotent* al lui A .

Exemple:

1. În inelul $\mathbb{Z}_6$ elementele $\bar{3}$ și $\bar{4}$ sunt idempotente, întrucât $\bar{3}^2 = \bar{3}$ și $\bar{4}^2 = \bar{4}$.

2. În inelul $\mathbb{Z}_8$ elementul $\bar{2}$ este nilpotent, întrucât $\bar{2}^3 = \bar{0}$.

3. În orice inel cu element-unitate, elementele 0 și 1 sunt idempotente.

4. În orice inel, 0 este element nilpotent.

Legătura cu divizorii lui zero este dată de următorul rezultat.

Propoziția 1. Fie A un inel. Atunci:

1. Orice element nilpotent nenul din A (dacă există) este divizor al lui zero.

2. Dacă A este inel cu element-unitate, orice element idempotent din A diferit de 0 și 1 (dacă există), este un divizor al lui zero.

Consecință. Într-un inel integru singurul element nilpotent este 0; dacă, în plus, inelul este cu element-unitate, singurele elemente idempotente sunt 0 și 1.

Următorul rezultat leagă elementele nilpotente de cele inversabile.

Propoziția 2. Fie A un inel cu element-unitate și $x \in A$ un element nilpotent. Atunci elementele $1 + x$ și $1 - x$ sunt inversabile.

Propoziția 3. Fie A un inel cu $\tilde{0} \in A$ unicul element nilpotent și $a, b \in A$ astfel încât $a^2 - b^2 \in U(A)$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

i) A este corp.

ii) Singurele soluții ale ecuației $(x - a)(x - b) = \tilde{0}$, $x \in A$, sunt $x = a$ și $x = b$.

Propoziția 4. Dacă numărul elementelor idempotente ale inelului A coincide cu numărul elementelor inversabile, atunci inelul A nu are elemente nilpotente nenule.

Propoziția 5. Fie A un inel cu 9 elemente astfel încât $\hat{1} + \hat{1} + \hat{1} = \tilde{0}$. Dacă A nu este corp și $\tilde{0} \in A$ este unicul element nilpotent al inelului A , atunci numărul elementelor inversabile ale inelului A coincide cu numărul elementelor idempotente.

Iată două probleme pe acest subiect, date la olimpiadele la matematică din anul 2007

1. Considerăm un inel finit în care numărul elementelor inversabile este egal cu numărul elementelor nilpotente. Arătați că un element x al inelului este inversabil dacă și numai dacă elementul $1 + x^m$ este nilpotent, pentru orice număr natural nenul m .

Soluție.

Mai întâi dacă a este nilpotent atunci $a - 1$ este inversabil. Într-adevăr există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^n = 0$. Atunci $1 = 1 - a^n = (1 - a)(1 + a + \dots + a^{n-1})$ deci $1 - a$ este inversabil de unde $a - 1$ este inversabil. Fie $N(A)$ mulțimea matricelor nilpotente și $I(A)$ mulțimea elementelor inversabile. Aplicația $\varphi: N(A) \rightarrow I(A)$, $\varphi(a) = a - 1$ este injectivă și din ipoteză $N(A)$ și $I(A)$ au același număr de elemente, deci φ este bijectivă. Așadar pentru orice element inversabil b rezultă că $\varphi^{-1}(b) = 1 + b$ este nilpotent și reciproc. Acum pentru orice element inversabil x rezultă că x^m este inversabil și deci $1 + x^m$ este nilpotent și reciproc.

2. Fie $p \in \mathbb{R}[X]$ un polinom cu coeficienți reali și $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ două matrice. Demonstrați că $p(AB)$ este nilpotentă dacă și numai dacă $p(BA)$ este nilpotentă.

Soluție.

Pentru $q(X) = \sum_{k=0}^n c_k X^k$, avem $q(AB) = c_0 I_n + AC$ și $q(BA) = c_0 I_n + CA$, unde $C = \sum_{k=1}^m c_k (BA)^{k-1} B = \sum_{k=1}^m c_k B (AB)^{k-1}$.

Dacă A este inversabilă atunci avem $\det(AB - xI_n) = \det(BA - xI_n) \Leftrightarrow \det(A^{-1}) \det(AB - xI_n) = \det(BA - xI_n) \det(A^{-1}) \Leftrightarrow \det(A^{-1}AB - xA^{-1}) =$

$\det(BAA^{-1} - xA^{-1}) \Leftrightarrow \det(B - xA^{-1}) = \det(B - xA^{-1})$

ceea

ce este adevărat.

Dacă A și C sunt neinvertabile, fie $D_y = A - yI_n$, iar $\det(D_y) = 0$ are cel mult n rădăcini reale, deci $\det(D_y) \neq 0, \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{y_1, \dots, y_n\}$, unde $y_1, \dots, y_n$ sunt rădăcinile polinomului $\det(D_y)$.

D_y este inversabilă, rezultă, folosind ce am demonstrat anterior că $\det(D_y C - xI_n) = \det(C D_y - xI_n)$, pentru orice $y \in \mathbb{R} \setminus \{y_1, \dots, y_n\}$. Fixând pe x polinomul de grad maxim n în y , care se obține, și anume $\det(D_y C - xI_n) - \det(C D_y - xI_n)$ este egal cu 0 pentru orice $y \in \mathbb{R} \setminus \{y_1, \dots, y_n\}$, deci este identic 0; alegând $y = 0$ rezultă $\det(AC - xI_n) = \det(CA - xI_n)$, pentru orice A și C .

Notând cu $f(x) = \det(AC - xI_n) = \det(CA - xI_n)$ este polinom, avem $\det(q(AB) - xI_n) = \det(AC - (x - c_0)I_n) = \det(CA - (x - c_0)I_n) = f(x - c_0)$.

Matricea $p(AB)$ este nilpotentă, rezultă că există $l \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $(p(AB))^l = O_n$; alegem $q = p^l$, $q \in \mathbb{R}[X]$. Polinomul caracteristic al lui $q(AB) = O_n$ este $\det(q(AB) - xI_n) = \det(O_n - xI_n)$ adică $\pm x^n$, rezultă că polinomul caracteristic al lui $q(BA)$ este tot $\pm x^n$.

Din teorema lui Cayley-Hamilton rezultă $(q(AB))^n = (p(AB))^{l \cdot n} = 0$, deci $p(AB)$ este de asemenea nilpotentă.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Petrică I., Lază I. (1993), *Probleme de algebră pentru liceu*, vol. III. București: Editura Petrean
- [2] Chiriac V., Chiriac M. (1994), *Probleme de algebră*. București: Editura Enciclopedică
- [3] Doniga C., Țiplea S., (2014), *Polinomul caracteristic asociat unei matrice*, Ed. Pim
- [4] Colecția *Gazeta Matematică*
- [5] Țena M. (1996), *Algebra. Structuri fundamentale pentru liceu*. București: Editura Copirint
- [6] Goian I., Sârbu P., Topală A. (2005), *Grupuri și Inele*. Chișinău: CEP-USM
- [7] Goian I., Marin V. (1998), *Structuri algebrice fundamentale în exerciții și probleme*. Chișinău: Evrica,.
- [8] Chricu M., Ulmeanu S. (2007), *Olimpiade și concursuri școlare clasele IX-XII*, Editura Tiparg

PREDAREA ȘI ÎNVĂȚAREA UNITĂȚILOR DE MĂSURĂ ÎN CICLUL PRIMAR

Lavinia SABĂU

Colegiul Național „Iosif Vulcan” Oradea, profesor pentru învățământul primar, lavinia74.sabau@gmail.com

Rezumat: *O problemă importantă în vederea succesului interacționării copilului cu mediul este aceea a estimării dimensiunilor unui obiect sau fenomen (estimarea lungimii unui obiect sau a unui drum, a capacității unui vas, a masei unui corp, a duratei desfășurării unui eveniment, etc.). Este necesar ca estimările făcute de elevi să fie verificate prin măsurare directă pentru ca eroarea de apreciere să scadă. În acest scop, trebuie făcută și o conectare la realitatea înconjurătoare, solicitările trebuind să vizeze mărimi și dimensiuni ale unor obiecte, distanțe, fenomene pe care elevii le întâlnesc frecvent în viața de zi cu zi.*

Cuvinte cheie: unități de măsură, metrul, litrul, gramul, secunda

Activitatea practică a impus, încă din cele mai vechi timpuri, ca oamenii să stabilească unități de măsură pentru diferite mărimi cu care lucrau, sau care le condiționau existența. De exemplu, pentru măsurarea lungimilor s-au folosit ca unități de măsură lungimile diferitelor părți ale corpului omenesc, cum sunt: cotul, palma, piciorul, degetul; pentru măsurarea volumelor: vatra, ocaua, litra; pentru măsurarea duratelor: ziua, noaptea.

Primele încercări de a stabili unele principii pentru elaborarea unor etaloane au apărut abia în secolul al XVII-lea. Atunci s-a stabilit ca etalonarea să aibă o mărime invariabilă și să ofere posibilitatea de a fi oricând refăcută.

La 10 decembrie 1799, Adunarea Națională a Franței a adoptat, printr-un decret, prototipurile de platină ale metrului și kilogramului și cu aceasta primul sistem de unități. Metrul, ca unitate de măsură pentru lungimi, reprezintă a 40-a milioana parte din lungimea meridianului pământesc care trece prin Paris, iar kilogramul, ca unitate de măsură pentru mase, reprezintă masa unui decimetru cub de apă distilată la temperatura de 40°C.

Ambele etaloane au fost depuse la Arhivele Naționale ale Franței, motiv pentru care au primit numele de "metrul de la Arhive" respectiv "kilogramul de la Arhive".

Poporul român a avut de-a lungul veacurilor atât etaloane proprii, cât și etaloane împrumutate de la alte popoare cu care a stabilit legături comerciale. Cu un secol în urmă măsurarea lungimilor se făcea cu cotul, stânjenul, palma, pasul, funia, iar măsurarea volumelor se făcea cu găleata, vatra, ocaua, banita, chila. Aceste etaloane, transmise la început prin obicei, au început să fie reglementate la noi începând cu secolul al XVII-lea. În anul 1830 s-a înființat în Țara Românească "Comisia îndestulării și îndreptării cumpenilor și măsurilor".

Primele încercări de a se introduce și la noi sistemul metric zecimal au apărut în timpul Revoluției Franceze, dar au fost respinse de autoritățile de atunci, pe motiv că introducerea lor va produce "împiedicare și învălmășală". Abia în anul 1864, în timpul domniei lui Alexandru Ioan Cuza a fost adoptat sistemul metric, obligativitatea lui fiind legată de data de 1 ianuarie 1866.

O dată memorabilă în istoria extinderii sistemului metric de unități a constituit-o ziua de 20 mai 1875, când, la Conferința diplomatică a metrului, un număr de 17 state au adoptat următoarele măsuri:

1. Stabilirea prototipului internațional al metrului etalon și al kilogramului etalon
2. Crearea Biroului Internațional de Măsuri și Greutăți, ca instituție științifică internațională
3. Crearea unui Comitet Internațional, care avea în componența sa oameni de știință din diferite țări și care trebuia să conducă activitatea Biroului Internațional de Măsuri și Greutăți
4. Convocarea o dată la 6 ani a Conferinței Generale de Măsuri și Greutăți în vederea "discuției și luării de măsuri necesare pentru extinderea și perfecționarea sistemului metric". Țara noastră a aderat oficial la această convenție în anul 1881, deși sistemul metric a fost adoptat încă din timpul lui Alexandru Ioan Cuza.

Karl Friedrich Gauss este primul savant care a observat că pentru efectuarea tuturor măsurătorilor fizice este suficient a se adopta un număr limitat de unități de măsură arbitrare, independente unele de altele, celelalte fiind determinate cu ajutorul primelor. Astfel el a propus încă din anul 1832 principiile de alcătuire a unui sistem de unități, considerând că pentru a se putea efectua măsurarea mărimilor fizice era suficient a se adopta trei unități independente și anume: unitatea pentru lungime, unitatea pentru masă și unitatea pentru durată.

La primul Congres Internațional al Electrotehnicienilor, ținut la Paris în anul 1881, s-a hotărât adoptarea primului sistem de unități științifice, denumit sistemul CGS, bazat pe unitatea de măsură pentru lungime (Centimetrul), unitatea de măsură pentru masă (Gramul) și unitatea de măsură pentru durată (Secunda).

La cea de-a X-a Conferință Generală de Măsuri și Greutăți din 1954 s-a hotărât stabilirea următoarelor unități fundamentale pentru sistemul practic de unități folosit în relațiile internaționale: metrul pentru lungime, kilogramul pentru masă și secunda pentru durată (sistemul MKS).

Cea de-a XI-a Conferință Generală de Măsuri și Greutăți (1960) a hotărât:

1. Denumirea de Sistem Internațional de Unități pentru sistemul bazat pe unitățile fundamentale stabilite: metrul, kilogramul, secunda, kelvinul, molul, amperul și candela.

2. Însemnarea prescurtata a sistemului cu inițialele: SI.

În acest sistem se consideră fundamentale, următoarele șapte mărimi fizice: lungimea, masa în mecanică, timpul, temperatura (în termodinamică), intensitatea curentului electric (în electricitate), intensitatea luminoasă (în optică), cantitatea de substanțe. Restul mărimilor existente se definesc prin intermediul acestora. Ele se numesc mărimi derivate: Metrul (m), Kilogramul (kg), Secunda (s), Kelvinul (K), Amperul (A), Candela (cd), Molul (mol).

În clasele I-IV, studiul mărimilor și al unităților de măsură reprezintă o interfață între matematică și viața de zi cu zi. Pe baza observațiilor și a reprezentărilor intuitive, elevii fac cunoștință cu unele noțiuni de bază despre mărimi și unități de măsură de largă utilizare, strict necesare omului.

Cunoașterea unităților de măsură, formarea capacității de a le utiliza cu ușurință și corect, dezvoltă rigurozitatea în raționament a elevilor, precizia și exactitatea. Operațiile cu unitățile de măsură și transformările lor duc simultan și la dezvoltarea gândirii active și operaționale.

Noțiunea de mărime, ce apare în sistemul predării-învățării matematicii în ciclul primar este socotită ca și cea de mulțime o noțiune primară, înțelegerea ei făcându-se pe bază de exemple.

Mărimile abordate începând cu clasa I sunt: lungimea, volumul (capacitatea vaselor), masa, timpul și valoarea. A măsura o mărime oarecare, înseamnă a compara această mărime cu o alta, luată ca unitate de măsură. Prin operația de măsurare se stabilește un raport numeric între mărimea de măsurat și unitatea de măsură considerată. De exemplu a măsura masa unui obiect înseamnă a o compara cu masa unui alt obiect, pe care îl vom considera drept unitate de măsură. Elevii trebuie să fie conduși să simtă necesitatea comparării mărimilor și introducerii unităților de măsură. Astfel, pentru a putea executa măsurările, elevii vor trebui învățați să înțeleagă conceptul de unitate de măsură și cum să folosească instrumentele de măsură.

Elevii vor înțelege că măsurările pe care le execută sunt asociate cu comparațiile pe care încearcă să le facă. Astfel, puși în fața situației-problemă de a decide în care dintre două vase prezentate este un volum mai mare de apă, elevii vor încerca diverse rezolvări. Vor compara folosind o ceașcă, un pahar, un vas de dimensiuni mai mici, stabilind astfel mai multe rezultate ale măsurării. Pe această bază vor înțelege cu mai multă ușurință necesitatea existenței unei unități de măsură standard și anume în cazul de față litrul (unitatea principală cu care se măsoară capacitatea vaselor).

Înțelegerea măsurării și a unităților de măsură nu implică întotdeauna introducerea imediată a unităților standard. Institutatorul trebuie să utilizeze unitățile nestandard (de exemplu: palmă, creion etc.). După ce se exersează măsurarea unei mărimi cu o unitate nestandard, este important să se dea

câteva date istorice legate de istoria măsurărilor, la noi și în alte țări, din care să reiasă că și în procesul intensificării schimburilor economice și științifice a rezultat ca o necesitate unificarea unităților de măsură.

Definiții ale unităților de măsură

Unitatea de măsură pentru lungime (metrul)

Mărime fizică fundamentală care exprimă întinderea spațială a corpurilor sau fenomenelor, distanța dintre două puncte; dimensiunea cea mai mare a unui corp sau a unei suprafețe plane dreptunghiulare. Simbolul pentru lungime se notează cu L (mare), iar cel pentru lățime cu l (mic). Unitatea de măsură pentru lungime este metrul. Metrul (m) este unitatea de măsură pentru lungime. Un metru este distanța parcursă de lumină în vid într-un interval de timp de $1/299792458$ dintr-o secundă. Din definiția de mai sus, rezultă faptul că, lumina se propagă în vid cu viteza de 299792458 metri pe secundă.

Unitatea de măsură pentru masă (kilogramul)

Masa se definește ca o mărime ce determină măsura inerției unui corp sau particulară, determinabilă la nivel macroscopic și măsurată, de asemenea, macroscopic. Simbolul masei este litera minusculă „ m ”, iar unitatea de măsură în sistemul internațional este kilogramul, sau exprimat simbolic și comun „ $1kg$ ”. Formula corespunzătoare celor de mai sus este: $\ll m \gg_{SI} = 1 \text{ kg}$

Kilogramul este singura unitate fundamentală formată cu ajutorul unui prefix. Astfel, deși conform prefixului *kilo* un kilogram este 1000 de grame, nu gramul este considerat unitate fundamentală, ci kilogramul.

Greutatea unui corp nu trebuie confundată cu masa lui. În viața curentă se face deseori confuzia între greutate și masă, aceasta din cauză că, la prima vedere, orice obiect care cântărește 1 kilogram-forță are masa tot de 1 kilogram. Din punct de vedere fizic însă cele două noțiuni sunt distincte. Astfel, masa este o proprietate intrinsecă a corpului, un scalar care nu depinde de locul unde se află corpul, și exprimă cantitativ inerția acestuia, adică tendința de a se opune mai puternic sau mai slab schimbării stării de mișcare sau repaus atunci când i se aplică o forță. În schimb, greutatea este o forță (un vector) care măsoară o interacțiune, în particular aceea dintre corpul a cărui greutate o măsurăm și corpul care generează câmpul gravitațional respectiv. În timp ce masa corpului este constantă, greutatea sa depinde de intensitatea câmpului gravitațional; de exemplu greutatea unui obiect pe Pământ este diferită de greutatea aceluiași obiect la mari altitudini, în stratosferă, în misiunile spațiale sau și pe Lună, deși masa obiectului e în toate cazurile aceeași.

Unitatea de măsură pentru timp (secunda)

Dintotdeauna timpul a fost un subiect important al filozofiei, artei, poeziei și științei. Există multe divergențe în legătură cu însemnătatea lui, din acest motiv este dificil de oferit o definiție a timpului care să nu ducă la controverse. Multe domenii folosesc o definiție operativă în care unitățile timpului sunt definite. Academicienii au o opinie diferită în ceea ce privește posibilitatea timpului de a fi măsurat sau încadrat într-un sistem de măsurare.

Măsurarea timpului a ocupat de asemenea savanți și tehnicieni, și a fost o primă motivație în astronomie. Timpul este de asemenea o problemă de o mare importanță socială, având valoare economică („timpul înseamnă bani”), precum și o valoare personală datorită timpului limitat din fiecare zi și din viețile noastre. Unitățile timpului au fost făcute prin acord pentru a cuantifica durata evenimentelor și intervalele dintre ele. Evenimentele care se produc regulat și obiectele cu mișcare aparent periodică au servit dintotdeauna ca standard pentru unitățile timpului. Exemple sunt aparenta mișcare a soarelui pe cer și fazele lunii.

Timpul este mersul înainte continuu și nedefinit al existenței și al evenimentelor care survin într-o succesiune după toate constatările ireversibilă din trecut, prin prezent, spre

viitor. Timpul este unul din conceptele fundamentale ale fizicii și filosofiei. Este o măsură a duratei evenimentelor și are diferite înțelesuri în funcție de contextul în care este definit. În fizică, timpul este o dimensiune a naturii și poate fi văzută ca o măsură a schimbării. În accepția fizicii clasice, timpul este un continuu. Fizica modernă (mai precis, teoria mecanicii cuantice) dispută însă această calitate, sugerând că ar exista doar continuu spațiu-timp. În filosofie, timpul este definit ca un flux neîntrerupt, ireversibil, care nu poate curge decât într-un singur sens. Este deci un continuu în care evenimentele se succed de la trecut, prin prezent spre viitor și în cadrul căruia se desfășoară toate procesele din natură. Definirea cu exactitate a timpului este o sarcină dificilă, atât în filosofie cât și în știință.

Secunda, având simbolul „s”, este o unitate de măsură pentru timp. Este definită cadurata a 9 192 631 770 de perioade ale radiației ce corespunde tranziției dintre cele două niveluri hiperfine ale stării fundamentale ale atomului de cesiu 133 în repaus la temperatura de 0 K.

Definiția secunde a fost inițial legată de perioada de rotație a Tământului în jurul propriei axe, prin împărțirea unei zile solare medii în 24 de ore, a fiecărei ore în 60 de minute, și a fiecărui minut în 60 de secunde. Acest mod de definire a fost suficient de precis până când au apărut ceasuri mai exacte care au dovedit că rotația Pământului nu are o perioadă constantă.

Ziua solară, ca unitate de timp, este acel interval de timp scurs din momentul când soarele se afla la meridianul locului, când are înălțimea maximă deasupra orizontului (la amiază), până a doua zi când trece din nou la meridianul locului. Această unitate de timp îndeplinea la începuturile omenirii, condiția de a fi legată de problemele vieții. S-a constatat că acest interval de timp nu este același pe parcursul unui an calendaristic, deoarece mișcarea Pământului în jurul Soarelui nu este uniformă în timp de un an.

Ziua sidereală este acel interval de timp care se scurge între două treceri consecutive ale unei stele fixe la meridianul locului; ziua sidereală are avantajul de a fi constantă, ea fiind egală cu timpul unei rotații complete a Pământului în jurul axei sale.

Această unitate de timp este utilizată în astronomie. Nu este folosită în practică, ca nefiind potrivită cu necesitățile vieții curente a pământenilor. Între cele două unități de timp amintite, adică între ziua solară și ziua sidereală, există o diferență de aproximativ 4 minute. În mod concret, această diferență se reflectă în faptul că pe parcursul mai multor zile, ea se acumulează și se ajunge la situația ca într-o zi Soarele să treacă la meridian, adică să fie la miezul zilei, la ora sidereală 12, pentru ea, după 6 luni, tot la ora sidereală 12 Soarele să fie la meridian în partea cealaltă, adică să fie la miezul nopții.

Pentru a se găsi o zi cu durată de timp constantă și legată de ziua solară obișnuită, în astronomie s-a introdus noțiunea de zi solară mijlocie. Durata zilei solare mijlocii este exactă și se fixează cu ajutorul observațiilor și al calculelor astronomice. Din acest motiv „ora exactă”, transmisă prin radio, televiziune este dată de observatoarele astronomice, intervalul de timp în care Pământul face o rotație completă în jurul Soarelui se numește an astronomic.

Acesta este constant, însă nu este egal cu un număr întreg de zile. Anul astronomic are 365,2422 zile solare mijlocii, adică are aproximativ $365 + \frac{1}{4}$ de zi. Anul real are 365 de zile și un sfert de zi. De aceea, anul calendaristic obișnuit are 365 de zile, iar din 4 în 4 ani, are 366 de zile, adică devine an bisect.

În ceea ce privește intervalul de timp numit oră și subdiviziunile sale, minutul și secunda, acestea au fost adoptate ca o mare necesitate de către toți oamenii de pe globul pământesc. Cu toate acestea, o deosebire între orele diferitelor localități de pe glob rămâne și trebuie să rămână, mai ales din punct de vedere al momentului de la care se începe numărarea orelor. De aici apare și exprimarea arhicunoscută „diferența de fus orar”.

Dacă ne vom închipui globul pământesc și meridianele lui, iar Soarele ca fiind la meridianul orașului București, atunci la noi este ora 12 (prânz). Cum Soarele este în acest moment la meridianul Bucureștiului, nu are cum să fie în același timp și la Londra și la New York. Cei din Londra trebuie să mai aștepte încă circa 2 ore până când Pământul rotindu-se, meridianul din

Londra va ajunge să treacă prin Soare. Deoarece Pământul face o rotație de 360° în 24 de ore, într-o oră face 15° .

Astfel, două localități a căror longitudine diferă prin 15° au ora diferită cu o oră. De aceea, întreg globul Pământesc este împărțit în 24 de fusuri orare. Când întinderea unei țări este situată în cadrul unui singur fus orar, atunci ora pentru toată țara respectivă se stabilește ca ora acelui fus; se consideră că ora unui fus este ora meridianului din mijlocul său.

În continuare voi prezenta orele diferitelor localități de pe glob în funcție de ora 24, ora României: Dacă la București este ora 24^{00} (ora zero) atunci la:

- ✓ ROMA este ora 23^{00}
- ✓ MOSCOVA este ora 1^{00}
- ✓ LONDRA este ora 22^{00}
- ✓ NEW YORK este ora 17^{00}
- ✓ MEXICO CITY este ora 16^{00}
- ✓ HONOLULU este ora 12^{00}
- ✓ BUENOS AIRES este ora 19^{00}
- ✓ SAN FRANCISCO este ora 14^{00}
- ✓ TOKYO este ora 7^{00}
- ✓ BEIJING este ora 6^{00} .

Unitatea de măsură pentru valoare (leu)

Leul românesc (plural: lei) este unitatea monetară a României. Un leu este subdivizat în 100 bani (singular: ban). La data de 1 iulie 2005, leul românesc a pierdut ultimele 4 zerouri, prin denominare (reevaluare) la rata de 1 leu nou (simbol bancar: RON) pentru 10.000 lei "vechi" (simbol bancar: ROL).

De la 1 iulie 2005 sunt în circulație următoarele bancnote și monede:

- monede: 1 ban, 5 bani, 10 bani, 50 bani
- bancnote: 1 leu, 5 lei, 10 lei, 50 lei, 100 lei, 200 lei (emisă în 2006), 500 lei

Unitatea de măsură pentru arie (m^2)

Aria unei suprafețe este o măsură a cât de întinsă este acea suprafață. Adesea cuvântul suprafață se utilizează cu sensul de arie. În matematică, aria este un număr real, în general pozitiv. În fizică, inginerie, geodezie etc, aria este o mărime fizică și ca atare are asociată o unitate de măsură. Unitatea de măsură pentru arie în Sistemul Internațional este metrul pătrat, având simbolul „ m^2 ”.

Pentru cazuri particulare, aria se poate defini astfel:

- aria unui triunghi este jumătate din produsul dintre lungimea unei laturi și distanța (lungimea perpendicularei) de la al treilea vârf pe latura respectivă. Se demonstrează că valoarea este independentă de latura aleasă.
- aria unui poligon este suma ariilor triunghiurilor în care se descompune poligonul. Se demonstrează că valoarea ei este independentă de alegerea descompunerii.
- aria unui dreptunghi este produsul lungimii unei laturi cu lățimea .
- aria unui triunghi echilateral este latura la patrat înmulțită cu radical din 3, totul supra 4.
- aria unui pătrat este latura la puterea a 2 a.
- aria unui triunghi dreptunghic isoscel este cateta la patrat supra 2.
- aria unui romb este diagonala 1 ori diagonala 2 , totul supra 2
- aria unui trapez este baza mare + baza mica ori înălțimea trapezului totul supra 2

Unitatea de masură pentru volum (litru)

Litrul (l) este o unitate de măsură pentru volum (spațial). Are ca simbol reprezentativ de unitate literele l și L. Litera L a fost adoptată pentru a se putea evita posibile confuzii între litera "l"

și cifra "1" atunci când trebuiesc scrise alăturat. Litru este utilizat ca unitate de măsură pentru volum (capacitate spațială), alături de unitatea SI metru cub (m^3). Un litru corespunde unui decimetru cub ($1 dm^3$).

Predarea-învățarea unităților de măsură pentru lungime

Pentru înțelegerea conceptului de lungime și măsură a ei se cere ca situațiile de învățare adoptate să aibă un pronunțat caracter intuitiv și participativ. Elevii au deja în **clasa I** unele cunoștințe și deprinderi privind mărimile și măsurarea lor din propria experiență de viață, din familie sau datorită însușirii cunoștințelor din grădiniță.

Acumularea acestor cunoștințe nu este însă sistematică, n-are conținut riguros științific, cunoștințele respective sunt, de regulă, superficial înțelese. De aici, necesitatea ca lecțiile destinate învățării lungimii, ca unitate de măsură, a multiplilor și submultiplilor săi, vor fi construite în funcție și în strânsă corelație cu noțiunile empirice pe care le au deja elevii. O primă idee pe care o vor desprinde elevii, pe cale intuitivă, este necesitatea măsurării lungimilor, necesitatea utilizării unei unități de măsură standard.

Apoi, copiii vor descoperi varietatea formelor sub care întâlnim metrul ca instrument de măsură în viața cotidiană:

- metrul liniar din lemn, necesar pentru măsurarea stofei;
- metrul tâmplarului, construit din segmente necesar la măsurarea ușilor, ferestrelor;
- metrul croitorului, confecționat din pânză și plastic.

Din toate aceste exemple, elevii vor desprinde ideea de unicitate și caracterul universal al metrului. Elevii vor exersa capacitatea de a aprecia diferite lungimi, pornind de la cele din sala lor de clasă: lungimea și lățimea clasei, a tablei, a cuierului, a catedrei.

Se vor efectua măsurători în curtea și în parcul școlii, esențial fiind ca ei să exerseze cât mai mult, prin diferite măsurări, utilizând cât mai multe mijloace de măsurare corectă. Pentru activitățile cu conținut practic, mărimile și lungimile vor fi cercetate cu multă atenție de către învățător și aceasta pentru ca acestea să fie exprimabile prin numere naturale sau în numere pe care elevii le cunosc în acel moment.

Exemple concrete:

1. Completează cu adevărat sau fals (A , F) :

catedra e mai lungă decât tabla ☐

banca e mai înaltă decât dulapul ☐

firul ierbii e mai scund decât copacul ☐

2. Alege din coloana din dreapta unitatea de măsură potrivită:

- | | |
|---|----------|
| - înălțimea unui scaun se măsoară cu | talpa |
| - lungimea clasei se măsoară cu | liniarul |
| - distanța dintre bănci se măsoară cu | pasul |

La **clasa a-II-a** traseul didactic de predare-învățare a noțiunii de lungime și de măsurare a ei include patru pași importanți:

1. Utilizarea termenilor specifici pentru compararea lungimilor: lung-scurt; înalt-scund; gros-subțire.

- Se compară obiecte diferite ca lungime (o riglă, un creion)
- Se aleg creioane de diferite lungimi. Se așază în ordinea mărimilor. Se compară creioanele câte două.

- Se măsoară lungimea băncii cu un creion, apoi cu linia. Se compară rezultatele.2. Exerciții practice de măsurare cu unități nestandard.
 - Se compară lungimea tablei cu lungimea catedrei.
 - Putem afla cât de lung este un obiect prin măsurare.
 - Măsurăm lungimea tablei, a catedrei, folosind aceeași unitate de măsură.
3. Conștientizarea necesității unităților standard.
- Pentru ca măsurarea aceleiași lungimi să nu aibă rezultate diferite, oamenii au inventat unități de măsură care se folosesc în lumea întreagă.
 - Se prezintă instrumente pentru măsurarea lungimilor.

3. Se pot realiza exerciții de estimare:

- estimați și apoi măsurați lungimea și lățimea clasei voastre. Ce constatați?
- estimați în metri distanțele: de la poarta școlii la ușa clasei; de la bancă la tablă.

Exemple de activități de învățare a unităților de măsură a lungimilor în clasa a II-a.

Au relevanță următoarele:

- exerciții-joc de măsurare cu palma, creionul, paharul, bile, cuburi. a lungimii diferitelor obiecte;
- comparări de lungimi de obiecte, având aceeași lungime sau lungimi diferite;
- ordonarea unor obiecte în funcție de lungimea lor „mai lung”, „mai scurt”, „mult mai lung”, „mult mai scurt”;
- efectuarea unor măsurări folosind etaloane neconvenționale date (etaloane din carton sau plastic);
- identificarea și utilizarea instrumentelor de măsură potrivite cu măsurarea efectuată, după caz: linia gradată, metrul, „centimetrul de croitorie”, ruleta.

În **clasa a III-a**, elevii vor studia temeinic multiplii metrului, pentru o exprimare mai ușoară a lungimii unei străzi, lungimii căii ferate, lungimii drumului de acasă până la școală, distanțelor dintre două orașe cunoscute. Elevii vor fi conduși să argumenteze necesitatea folosirii metrului, hectometrului, kilometrului. Este indicat ca elevii organizați pe grupe de 4-5, să exprime lungimea terenului de sport în metri, iar aceeași mărime să fie exprimată printr-o lungime mai mare de 10 ori adică în decametri și, apoi, solicitați să desprindă necesitatea adoptării multiplilor metrului.

Multiplii metrului:

1 dam = 10 m

1 hm = 10 dam = 100 m

1 km = 10 hm = 100 dam = 1000 m

Submultiplii metrului:

1 dm = 1/10 m; (10^{-1} m)

1 cm = 1/10 dm = 1/100 m; (10^{-2} m)

1 mm = 1/10 cm = 1/100 dm = 1/1000 m; (10^{-3} m)

Se va atrage atenția că multiplii consecutivi sau submultiplii consecutivi ai metrului se găsesc într-un raport unitar, din 10 în 10. În procesul formării noțiunilor de decimetru (dm), centimetru (cm), milimetru (mm), adică submultiplii metrului, elevii vor fi solicitați să măsoare dimensiunile manualului de matematică, ale penarului, creionului.

Conceptul de submultiplu se formează și se fundamentează orientându-i pe elevi să micșoreze metrul de 10 ori, de 100 de ori, respectiv de 1000 de ori. Un submultiplu sau un multiplu oarecare al metrului este de 10 ori mai mic decât cel imediat superior, respectiv de 10 ori mai mare decât cel imediat inferior lui.

Exemple concrete:

1. Transformă:

1m=.....dm=.....cm=.....mm
 5m=.....mm
 5dm=.....cm
 7dm=.....mm
 400cm=.....m
 600cm=.....m=.....dm
 30mm=.....cm
 3km=.....dam=.....m
 9000mm=.....m=.....dm=.....cm
 900dam=.....hm=.....km
 7000m=.....dam=.....hm=.....km

2m=.....cm
 12m=.....dm
 3cm=.....mm
 30dm=.....m
 200cm=.....dm=.....m
 1km=.....hm=.....dam=.....m
 8hm=.....dam=.....m
 7000mm=.....cm=.....dm=.....m
 9dam=.....m
 600dam=.....m=.....hm=.....km

2. Calculează:

5m+3dm= ?dm
 6cm+2mm= ?mm
 7dam+8hm= ?m
 80cm+2m= ?dm
 700cm+20dm= ?m
 500m+6km= ?hm

3. În 3 baloturi sunt 156m de material. Câți metri sunt în fiecare balot dacă în primul sunt de 3 ori mai mulți metri decât în al doilea, iar în al treilea sunt cu 6 metri mai mulți decât în al doilea.

În **clasa a IV-a**, elevii vor cunoaște toate unitățile de măsură pentru lungime, multiplii și submultiplii metrului și vor fi capabili să efectueze transformări cu aceștia, pe baza operațiilor învățate. Temeiul aplicativ îl va da varietatea exercițiilor și rezolvărilor de probleme. O deosebită importanță prezintă formarea deprinderilor de efectuare rapidă și precisă a măsurătorilor, a transformărilor și, mai ales, a utilizării raționamentului logic în rezolvarea exercițiilor și problemelor.

Exemple concrete:

1. Realizează corespondența între coloana întâi (A) și coloana a doua (B):

A	B
• multiplii metrului	• metrul
• unitatea principală	• decimetrul, centimetrul, milimetrul
• submultiplii metrului	• decimetrul, hectometrul, kilometrul

2. Scrie prescurtat:

• 10 decimetri = _____	• 260 milimetri = _____
• 60 centimetri = _____	• 1 decimetru = _____
• 5 kilometri = _____	• 25 metri = _____
• 30 hectometri = _____	• 43 kilometri = _____

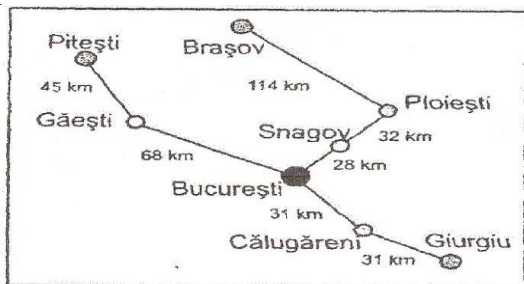
3. Scrie așa cum se citește:

• 10 cm = 10 centimetri	• 70 m = _____
• 15mm= _____	• 20km= _____
• 35dm= _____	• 10hm= _____
• 34dam= _____	• 50cm = _____

4. Completează cu unitatea de măsură corespunzătoare:

- distanța Bacău – București = 300 _____
- lungimea unui creion = 21 _____
- lungimea unei furnici = 3 _____
- lungimea curții școlii = 65 _____

5. Imaginează-ți că pleci în excursie cu mașina. Observă harta și află câți kilometri vei parcurge pe următoarele trasee:



- București – Ploiești - Brașov:
- Giurgiu – București – Pitești:
- Pitești – București – Ploiești:

Conceptul de masă. Unități de măsurare a masei

Formarea conceptului de masă începe încă din **clasa I** prin solicitarea elevilor de a compara mase prin mânuire directă și aprecierea lor prin exprimări de genul: „mai ușoară”, „mai grea”. În scopul însușirii conceptului de masă, elevii vor fi îndrumați să viziteze diferite centre comerciale, piețe, în care produsele vândute se cântăresc în prealabil, să observe cu atenție munca pe care o desfășoară vânzătorii și să rețină diferite categorii de aparate de măsură (cântare), pe care aceștia le folosesc. Observațiile culese de elevi vor fi urmate de explicații și de exerciții concrete de apreciere și comparare a masei unor corpuri. Mai întâi, se vor efectua exerciții de comparare a masei unor corpuri a căror diferență de greutate să fie cât mai evidentă, ca de exemplu masa unui caiet și masa unei cărămizi. Pentru însușirea noțiunii de „masă” elevii vor parcurge următoarele etape/acțiuni:

- a) corpuri mai grele și corpuri mai ușoare, prin comparații cu mâna;
- b) compararea maselor cu ajutorul balanței cu brațe egale;
- c) compararea, sortarea și gruparea obiectelor cu aceeași masă;
- d) conservarea masei, folosind un obiect care poate fi descompus în mai multe părți;
- e) folosirea unității de măsură pentru a exprima rezultatul cântăririi;
- f) sesizarea necesității unității standard;
- g) necesitatea multiplilor și submultiplilor unității standard;
- h) raportul unitar dintre multiplii și submultiplii consecutivi.

Apare momentul potrivit (**clasa a II-a**) să introducem kilogramul ca unitate de măsură standard (1 kilogram = 1 kg). Se aduce în fața elevilor zahăr preambalat în pungi de un kg. Și greutatea marcate cu 1 kg, 2 kg, 5 kg. Arătăm elevilor că pe fiecare pungă cu zahăr scrie 1 kg. Plasăm pe un taler al balanței o pungă de zahăr, iar pe celălalt o pungă de un kg. Constatăm că balanța se află în poziție de echilibru. Elevii observă de greutatea cu marca de un kilogram cântărește tot atât ca și punga de zahăr. În continuare vom folosi greutatea cu marca de un kg atunci când dorim să cântărim un kg dintr-un anumit produs. În mod analog conștientizăm la elevi necesitatea folosirii greutăților marcate cu 2 kg, 3kg, 5 kg.

La clasa a II-a nu se introduc multiplii și submultiplii kilogramului ci doar prin exerciții practice noțiunile de jumătate și sfert de kilogram și se menționează ca instrument de măsură pentru corpurile care au masa de mii de kilograme, un cântar numit basculă, folosit în hale industriale, porturi.

În urma diferitelor exerciții practice de comparare a maselor diferitelor obiecte, elevii vor observa că masele corpurilor diferă, că diferența dintre masele a două corpuri poate fi mai mare sau mai mică, că unele corpuri au aceeași masă.

Este foarte important ca învățătorul să scoată în evidență și faptul că, pentru corpuri cu structură diferită, masa lor nu este direct proporțională cu volumul: pentru același volum masele unor corpuri sunt diferite, iar pentru mase egale, volumele pot fi diferite.

Un exemplu arhicunoscut este legat de întrebarea: Ce atâră mai greu, 1 kg de fier sau 1 kg de lână? Pentru formarea ideii de conservare a masei se va utiliza experimentul lui J. Piaget cu privire la relația acțiune-percepție-înțelegere-transformare-motivare-invarianță-conceptualizare.

Pentru aceasta, elevii vor primi câte două mingi de plastilină, egale, pentru a le măsura masele. Una dintre mingi se modelează apoi sub forma unui disc plat. Se constată că elevii nu-și concentrează atenția asupra discului și ajung la concluzia că el cântărește mai mult decât mingea din plastilină. Prin cântărirea ulterioară cu ajutorul balanței de către fiecare elev în parte, se formează noțiunea de conservare a masei.

Pe baza acestei experiențe și a altora asemănătoare, folosind boabe de porumb, pietricele de forme diferite, se poate stabili că masa unui corp poate fi comparată și apreciată exact cu ajutorul unei mase marcate, kilogramul.

Se va prezenta elevilor piesa de 1 kilogram, precizându-se că este o copie a kilogramului etalon, prototip de platină iridiată, adoptată în 1889, și se observă forma, culoarea, materialul din care este confecționată, unitatea de măsură de 1 kilogram.

După ce piesa de 1 kg va trece din mână în mână pe la fiecare elev, pentru a fi mai bine studiată se va trece la compararea masei marcate de 1 kg cu diferite corpuri, care au aceeași masă, apoi compararea a două corpuri diferite, fiecare având masa de 1 kg. pentru ca, astfel, pe baza legii pragului diferențial (legea intensității), să poată aprecia mărimea masei de 1 kg.

În faza următoare, se face precizarea că pentru a obține o măsurare exactă a masei unui anumit obiect se folosește un instrument special: cântarul. Pentru a le dovedi elevilor că masa unui corp rămâne mereu aceeași, este indicat să se folosească succesiv diferite cântare, în orice caz acestea trebuie să fie bine echilibrate pentru a nu induce măsurări aproximative.

Aici se poate examina problema erorii, prin precizia măsurării și a intervalului de încredere în măsurare. Elevii vor trece la exerciții de cântărire a unor corpuri de 2 kg de 3 kg, de 5+1/2 kg. Se poate apela și la un exercițiu de tipul: învățătorul indică o anumită masă, iar elevii stabilesc obiectele ce pot avea această masă.

La **clasa a III-a** se vor relua cunoștințele în legătură cu masa corpurilor și cu kilogramul ca unitate standard, lărgindu-se sfera cu multiplii și submultiplii kilogramului. Multiplii kilogramului sunt q (quintalul) și t (tona), care nu fac parte din S.I., iar submultiplii kilogramului sunt hectogramul (hg), decagramul (dag) și gramul (g).

La rândul său, gramul are ca submultiplii decigramul (dg), centigramul (cg), miligramul (mg). $1\text{ t} = 1000\text{ kg}$ (10^3 kg) - tona;

$1\text{ q} = 100\text{ kg}$ (10^2 kg) - quintalul;

$1\text{ kg} = 1000\text{ g}$ - kilogramul;

$1\text{ hg} = 100\text{ g}$ - hectogram;

$1\text{ dag} = 10\text{ g}$ - decagram;

1 g - gramul

$1\text{ dg} = 1/10\text{ g}$ (10^{-1}) decigram;

$1\text{ cg} = 1/100\text{ g}$ (10^{-2}) centigram;

$1\text{ mg} = 1/1000\text{ g}$ (10^{-3}) miligram.

Se va face precizarea că utilizarea practică a submultiplilor gramului are loc în farmacii, cofetării, unde gramul este considerat unitatea principală de măsură. Cunoașterea unităților de

măsură mai mari decât kg se va realiza în mod intuitiv, în urma vizitării diferitelor locuri de muncă unde se utilizează cântarul zecimal sau maza (la depozite en-gross, fabrici de cherestea).

Totodată, în cadrul lecțiilor de însușire/învățare a conceptului de masă și a unităților de măsurare a masei, se va aduce și un cântar pentru persoane solicitând fiecărui elev să se cântărească, pentru a-și afla propria greutate. În vederea înțelegerii raportului unitar între unitățile de măsură a masei, se folosește analogia cu unitățile de măsură pentru lungime, în sensul că multiplii și submultiplii unității masei cresc și descresc tot din 10 în 10. Astfel, avem relațiile:

$1 \text{ kg} = 10 \text{ hg} = 100 \text{ dag} = 1000 \text{ g} = 10000 \text{ dg} = 100000 \text{ cg} = 1000000 \text{ mg}$

$1 \text{ hg} = 10 \text{ dag} = 100 \text{ g} = 1000 \text{ dg} = 10000 \text{ cg} = 100000 \text{ mg};$

$1 \text{ dag} = 10 \text{ g} = 100 \text{ dg} = 1000 \text{ cg} = 10000 \text{ mg}.$

De asemenea, se va sublinia faptul că citirea numerelor zecimale, reprezentând masele unor corpuri și schimbarea unităților de măsură se face la fel ca la lungime, raportul lor unitar fiind același.

Exemplu: 214,25 g se va citi: „214 grame, 2 decigrame și 5 centigrame” sau schimbând unitatea, obținem: $214,25 \text{ g} = 2142,5 \text{ dg} = 21425 \text{ cg}.$

Predarea-învățarea unităților de măsură pentru timp

Timpul este una dintre mărimile cele mai abstarcte pe care le învață elevii în clasele I - IV. Predarea-învățarea mărimii timp și a unităților de măsură se fac în strânsă legătură cu activitățile, fenomenele și evenimentele periodice cunoscute de elevi.

Încă din **clasa I** elevii știu că lecțiile au loc după un anumit program (orarul clasei). Lecțiile se desfășoară în intervale de timp egale. Școlarii mici știu deja că fiecare lecție durează o oră, iar programul unei zile durează 4-5 ore. Cuvântul oră nu are o semnificație precisă pentru copiii din clasa I. Învățătorul trebuie să dea un sens mai exact duratei de o oră. Această cerință se poate rezolva utilizând ceasul ca instrument de măsură a timpului. Inițial e bine să folosim un ceas care este prevăzut numai cu acul orar.

Dacă prima lecție începe la ora 8, vom arăta elevilor pe ceasul demonstrativ că acul orar se află în dreptul cifrei 8. La începutul lecției a doua vom observa că acul orar se află în dreptul cifrei 9. Spunem elevilor că prima lecție a durat de la ora 8 până la ora 9 (într-o oră sunt incluse activitatea propriu-zisă și recreația). Acum este ușor de înțeles că de la ora 8 la ora 9 a trecut o oră (s-a scurs intervalul de timp de o oră). Identificăm și alte durate care sunt cunoscute de către elevi: un muncitor trebuie să lucreze 8 ore, timpul de somn al unui copil este de 10 ore.

Și învățarea altor unități de măsură pentru timp, cum ar fi ziua, săptămâna, luna, se realizează prin corelarea acestor durate cu anumite activități sau fenomene care sunt periodice (perioada fiind de o zi, de o săptămână sau de o lună).

Pentru predarea unității de măsură de o lună, învățătorul va construi un calendar pe o perioadă de lună (de exemplu de luni 5 aprilie, până marți 4 mai). Vom spune elevilor că acest interval de timp reprezintă o lună. De specificat că măsura de timp de o lună nu este tot una cu luna calendaristică, despre care știm că nu are un număr constant de zile. La fel se procedează și cu durata de un an.

Începând cu **clasa a II-a** se predă o unitate de măsură a timpului care se numește minut și este de 60 de ori mai mică decât ora. **1 secundă** este unitatea fundamentală de măsură a timpului și reprezintă durata de 9.162.631.770 perioade ale radiației corespunzătoare tranziției între cele două nivele hiperfine ale stării fundamentale a atomului de cesiu 133. Recreația dintre două ore este de 10 minute. Învățătorul prezintă elevilor un ceas de masă la care cadranul este divizat în șase părți egale, iar fiecare parte are zece diviziuni mai mici (în total 60). Se arată elevilor cele două ace ale ceasului: acul orar și acul minutar. Le demonstrăm că în timp ce acul orar parcurge, de exemplu porțiunea de cadran de la ora 8 la ora 9, acul minutar parcurge întreg cadranul, plecând din poziția

marcată cu 12 și revenind în poziția inițială. Durata în care acul minutar parcurge intervalul dintre două diviziuni consecutive dintre cele 60, se numește minut.

Elevii vor consemna în caiete duratele în minute pentru diverse activități. După predarea tuturor unităților de măsură a timpului, în scopul înțelegerii relațiilor de mărime existente între el, se întocmește un tabel de sinteză:

- 1 minut = 60 secunde;
- 1 oră = 60 minute = 3600 secunde;
- 1 zi = 24 ore; 1 săptămână = 7 zile;
- 1 decadă = 10 zile;
- 1 lună = 28, 29, 30 sau 31 zile;
- 1 trimestru = 3 luni;
- 1 semestru = 6 luni;
- 1 an = 4 trimestre = 2 semestre = 12 luni (365 zile sau 366 zile)
- 1 deceniu = 10 ani;
- 1 secol (veac) = 10 decenii = 100 ani;
- 1 mileniu = 10 secole = 100 decenii = 1000 ani.

Exemple:

1. Transformă și completează:

- a) 1 min =s 300 s =min 48 h = zile
 3 min =s 480 min = h 6 h =min
- b) 5 h 4 min = min 4 zile 5 h =h
 4 min 20 sec =s 36 h ½ zi =zile=.....h
- c) 120 s + 5 min =min 5 s + 5 m =s
 8 min + 8 h =min
- d) 4 h 45 min + 2 h 15 min = h
 23 h 35 min + 4 h 50 min = h.....min
 15 12 min + 32 h 35 min =h.....min

2. Completează tabelul:

Cu 45 min. mai devreme	În prezent	Peste 1 ora și 15 minute
	Ora 17	
	Ora 9	
	Ora 22 și 10 min.	

3. Avionul decolează de la Cluj Napoca la orele 13 și 25 de minute și aterizează la Constanța la orele 16 și 10 minute. În cât timp a străbătut avionul distanța de la Cluj- Napoca la Constanța?

Noțiunea de suprafață. Unități de măsură pentru suprafață

Numim mărime derivată”, acea mărime a cărei unitate de măsură depinde de una sau mai multe unități de măsură ale unităților fundamentale. Noțiunea de suprafață poate fi gândită independent de noțiunea de lungime. Aria poate fi deci considerată și ca o mărime fundamentală. Pentru a măsura suprafețele se folosește în mod obișnuit, ca unitate de măsură, aria unui pătrat care are latura egală cu unitatea de lungime, adică 1 m. De aceea, spunem că suprafața sau aria este o mărime derivată, având la bază ca unitate fundamentală, lungimea.

Metru pătrat, ca unitate de măsură pentru suprafețe, are multipli și submultipli, situați într-un raport unitar, astfel încât un multiplu sau un submultiplu oarecare al metrului pătrat este de 100 de ori mai mare decât cel imediat inferior, respectiv de 100 de ori mai mic decât cel imediat superior.

Multiplii:

$$1 \text{ km}^2 = 100 \text{ ha} = 1000000 \text{ m}^2;$$

$$1 \text{ hm}^2 = 1 \text{ ha} = 10000 \text{ m}^2;$$

$$1 \text{ dam}^2 = 1 \text{ ar} = 100 \text{ m}^2.$$

Submultiplii:

$$1 \text{ dm}^2 = 1/100 \text{ m}^2 = 10^{-2} \text{ m}^2;$$

$$1 \text{ cm}^2 = 1/10000 \text{ m}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2;$$

$$1 \text{ mm}^2 = 1/1000000 \text{ m}^2 = 10^{-6} \text{ m}^2.$$

Noțiunea de volum. Unități de măsură pentru volum

Studiul măsurării volumelor (capacităților) începe mai întâi cu intuirea unor mărimi concrete cărora li se asociază noțiunea de capacitate. Vom prezenta elevilor diverse vase pe care sunt scrise capacitățile lor în litri. Antrenăm elevii într-o conversație din care să rezulte utilitatea acestor vase.

În scopul înțelegerii noțiunii de capacitate, elevii sunt antrenați într-o operație de măsurare a unor vase în care se poate păstra lichid. La început vom utiliza ca unitate de măsură un vas al cărui conținut se cuprinde de un număr exact de ori în fiecare din vasele măsurate. Scriem pe tablă rezultatele obținute în urma măsurării și, în funcție de aceste rezultate, ordonăm crescător vasele după volumele de lichid pe care le conțin.

În urma acestei ordonări putem să introducem expresiile: vas cu capacitate mai mare, vas cu capacitate mai mică și vas care are aceeași capacitate. Prezintă elevilor rezultatele măsurătorilor pentru aceleași vase, dar cu altă unitate de măsură convenabil aleasă.

Se va justifica importanța alegerii unei unități de măsură standard pentru măsurarea volumelor lichidelor (litru). Pentru a fi cât mai aproape de experiența cotidiană a elevilor vom folosi sticle din comerț de un litru. Reluăm operația de măsurare a vaselor utilizând sticla de un litru și în acest fel vom determina capacitățile vaselor în litri. Introducem scrierea pentru capacitatea de un litru (un litru = 1 l) și punem pe fiecare vas o etichetă pe care scriem capacitatea exprimată în litri (de exemplu 10 l). Unitatea de litru se introduce numai în clasa a II – a (conform programei în vigoare).

În formarea noțiunii de capacitate a unui vas (sau volum al unui lichid) la clasa a II – a se recomandă următorul traseu didactic:

- Explicarea noțiunii de capacitate = încăperea sau volumul unui vas cât încapă într-un vas cantitatea de lichid, cereale, zahăr, sare care se pot turna într-un vas.
- Se aleg vase de dimensiuni diferite.
 - în ce vas încapă mai multă apă? Dar grâu?
 - cum putem dovedi că un vas conține mai mult decât celălalt?
 - este necesar să se facă experimente la care să participe efectiv copiii.
 - așezați vasele în ordinea capacității lor. Se verifică dacă vasele au fost așezate corect, prin umplerea cu apă.

A. Măsurarea capacității unui vas cu unități nestandard

1. Pe catedră pot fi cani, pahare, sticle, borcane. Se cere elevilor să măsoare capacitatea unui borcan folosind ca unitate de măsură paharul.
2. Se toarnă apa din borcan în pahare. Se numără câte pahare s-au umplut cu apa din borcan.
3. Constatăm că borcanul are capacitatea de: 4 pahare mari; 8 pahare mici.

B. Unități de măsură standard

1. Pentru a putea măsura capacitatea unui vas, oamenii au inventat unități de măsură a capacității care se folosesc în întreaga lume.
2. Unitatea principală cu care se măsoară capacitatea vaselor este litru (l)
3. Se prezintă litru standard din metal (sau se poate indica pe o planșă); se pot folosi de asemenea diferite sticle de un litru.

4. Pentru ca elevii să înțeleagă mai bine, se pot face exerciții practice de măsurare ca unitate standard. 5. Estimarea capacității vaselor. Se consemnează datele estimate, apoi se trece la măsurarea vaselor. Atât consemnarea datelor cât și măsurarea se efectuează de către elevi.

C. Conștientizarea mărimii capacităților de o jumătate de litru, un sfert de litru Lichidul dintr-o sticlă de un litru se toarnă în sticle de jumătate de litru. Se observă că se umple 2 sticle. Cantitatea de lichid din sticla de 1 litru se toarnă în 4 pahare de 250 ml. În câte părți egale s-a împărțit cantitatea de apă?

D. Exerciții pentru aplicarea cunoștințelor nou-însușite

- Câte sticle cu capacitatea de jumătate de litru pot umple o sticlă de un litru? Dar de 2 litri? Dar de 4 litri?
- Câte sticle cu capacitatea de un sfert de litru se vor umple cu lichidul dintr-un bidon de 4 litri? Dar de 8 litri?
- Câte sticle cu capacitatea de un sfert de litru se vor umple cu lichidul dintr-o sticlă plină de 2 litri?
- Câte pahare cu capacitatea de un sfert de litru se pot umple dintr-o sticlă cu capacitatea de un litru? Dar de 2 litri? Dar de 4 litri?

Valoarea. Unități de măsură a valorii

Încă din clasa I, conceptul de valoare se studiază plecând de la procesul intuitiv de cunoaștere a banilor sub formă de bancnote și monede. Banul, sub diferitele sale forme și valori, reprezintă un echivalent general al tuturor mărfurilor, un instrument general de schimb, un raport valoric, deci, o măsură a valorii, un etalon al prețurilor. În România, moneda națională este **leul**, cu singurul său submultiplu – **banul** (1 leu = 100 bani). De asemenea, elevii vor înțelege că cel mai sigur și corect mod de a obține bani este munca. Elevii vor face cunoștință cu toate diviziunile monetare și bancare existente în România la data parcurgerii lecției, respectându-se și conceptul de număr natural cu care se lucrează în acel an școlar, conform programei.

Astfel, în clasa I, elevii nu vor putea opera cu valori nominale de zeci de mii sau sute de mii, ci vor efectua jocuri didactice: „De-a librăria”, „La magazinul alimentar”, determinând o totală potențare psihologică, realizându-se un dublu scop: cel instructiv și cel practic. Conceptul de preț sau valoare a lucrurilor, trebuie dedus și înțeles de elevi din analiza unor produse sau obiecte cunoscute de aceștia, însușindu-și totodată exprimarea: „mai scump”, „mai ieftin”.

Înțelegerea conștientă a noțiunii de valoare va permite degajarea ideii de măsurare a ei. Învățătorul trebuie să introducă noțiunea de valoare în strânsă legătură cu noțiunile empirice pe care le au deja elevii. Se organizează un dialog în legătură cu valoarea unui produs alimentar. Luăm în discuție două produse alimentare bine cunoscute: orezul și uleiul comestibil. Prezentăm în fața elevilor o pungă cu orez (pe care scrie 1 kg) și o sticlă de ulei (pe care scrie 1 litru).

Pe fiecare produs este trecut prețul (1 kg de orez costă 3,7 lei iar un litru de ulei costă 6.4 lei). Elevii observă că un litru de ulei costă mai mult decât un kilogram de orez). Majoritatea copiilor știu acest lucru din experiența cotidiană. Spunem elevilor că un litru de ulei are valoare mai mare decât un kilogram de orez. E bine să explicăm de ce un litru de ulei are valoare mai mare decât un kilogram de orez. Acum elevii vor înțelege că fiecare produs alimentar are un preț deoarece are o anumită valoare.

În continuare explicăm elevilor ce înseamnă să cumpărăm un produs alimentar. A cumpăra un produs alimentar înseamnă a lua din magazin acel produs în schimbul lui plătindu-se o anumită sumă de bani care reprezintă prețul. Înseamnă că valoarea unui produs se măsoară prin bani. Prețul unui obiect reprezintă măsura valorii acelui obiect.

Banii se întâlnesc sub formă de monede sau bancnote. Bancnotele sunt confecționate din plastic sau hârtie, iar monedele din metal. Pentru monede se mai folosește termenul de mărunțiș.

Lecțiile organizate pentru predarea-învățarea unităților de măsură a valorii trebuie să aibă un pronunțat caracter practic, elevii fiind solicitați să simuleze situații reale din viața cotidiană.

La clasa a II-a se recomandă exerciții de recunoaștere a monedelor și bancnotelor emise în țara noastră dar și exerciții practice de schimbare a unei monede cu altele, echivalente ca valoare. Se propun elevilor exerciții de schimbare a monedelor sub formă de joc.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Alb-Lupaș A. (2013), *Predarea matematicii în învățământul primar - aspecte metodice*”, Editura Universității din Oradea, Oradea
- [2] Petrovia C. (2014), *Didactica matematicii pentru învățământul primar*, Editura Polirom,;
- [3], Lupu C., Săvulescu D. (1998), *Metodica predării matematicii*, Editura Paralela 45, Pitești, Ediția a II-a
- [4] Brânzei D., Roxana, Brânzei R. (2008). *Metoda predării matematicii*”, Editura Paralela 45, Pitești
- [5] Dăncilă, E.; Dăncilă, I. (2005), *Culegere de exerciții și probleme de matematică pentru clasele I- IV*”, Editura FF PRES, București
- [6] Săvulescu D. etc.(2006), *Metodica predării matematicii în ciclul primar*, Editura Gheorghe Alexandru, Craiova,;
- [7] Rusu E., Oprescu E., Oprescu N., (1965), *Metodica predării matematicii*, Editura didactică și pedagogică, București,;
- [8] Neacșu I, Gălățeanu M., Predoi P. (2001). *Didactica matematicii în învățământul primar*, Editura Aius, Craiova
- [9], Roșu M. (2006), *Didactica matematicii în învățământul primar*, Editura All Educațional, București

METODA MONTESSORI

Marinel ZAHA

Școala Gimnazială nr. 1 Petreu, județul Bihor, profesor de matematică, marinel.zaha@yahoo.com

Rezumat: În această lucrare vom prezenta Metoda MONTESSORI, rolul profesorului în implementarea și aplicarea ei, condițiile și principiile care stau la baza ei, și școli din România unde se aplică.

Cuvinte cheie: metoda Montessori, clasa Montessori, principii, școli din România

În cadrul sistemului de învățământ din România, prin inițiativele realizate la nivel central, teritorial și local, după anul 1990, sunt instituționalizate următoarele alternative (metode) educaționale, aplicabile în învățământul preșcolar și primar, cu deschidere spre învățământul secundar: Waldorf, Montessori, Step by step, Freinet și Jena-Petersen.

Maria Montessori (1876-1952), medic și psiholog, a realizat un adevărat pionerat în direcția căutării acelor modalități educative care să stimuleze și să dezvolte la maximum potențialul de învățare de care dispune fiecare individ.

În centrul filosofiei pe care o propune și a metodei pe care o promovează, ea situează ideea afirmării libertății a copilului, ale cărei baze se pun în copilăria timpurie când acesta învață cum să învețe. În consecință:

- copilul trebuie tratat cu un respect deosebit;
- el este văzut ca un individ cu personalitate unică și cu un potențial intelectual diferit de al altora;
- în perioada preșcolarității, copilul își dezvoltă sentimentul de sine care este esențial în raport cu dezvoltarea sa viitoare;
- copilul nu este un adult în miniatură (idee preluată de la Rousseau).

Ca strategie, metoda Montessori pune accent pe individualizarea instruirii, menținând copiii în sala de clasă. Rolul educatorului se rezumă, în aceste condiții, la *pregătirea mediului* și la *observarea copilului*.

Mediul educațional poate fi considerat pregătit atunci când:

- oferă materiale educative adaptate nevoilor copilului;
- lasă fiecărui copil libertatea de a-l explora, pentru a se dezvolta în ritmul său natural.

În general - spune Montessori - *adultul nu trebuie să facă pentru copil ceea ce acesta poate să facă de unul singur*. El are o *mintă absorbantă* și învață fără efort.

Ceea ce învațărilor complete este considerată automotivarea, de aceea, copilul și învățarea sunt situate pe primul loc, iar predarea și programa de educație pe locul al doilea.

Suștinătorii metodei Montessori pledează pentru conceperea unui mediu de instruire bazat pe obiecte mici, ușor de modelat și detaliate din punct de vedere vizual. Metoda de educație este o metodă științifică, bazată pe observarea obiectivă a copilului, pe pregătirea mediului de instruire pe baza observațiilor realizate și pe conceperea programei de educație în mod creativ, funcție de nevoile copilului.

În sistemul Montessori, educatorul este ghidul și nu sursa tuturor învățăturilor. El lasă copilului libertatea de a găsi singur soluțiile rezolvării propriilor lui probleme.

„Să nu faci niciodată pentru un copil ceea ce poate face singur.”

„Trebuie să ajutăm copilul să acționeze singur, să voiască singur, să gândească singur, aceasta este arta celor ce aspiră să slujească spiritul”

Rolul profesorului

În cadrul metodei sale, Dr. Montessori a conceput un rol cu totul nou pentru educator. De cele mai multe ori ne referim la acesta sub numele de ghid sau director, întrucât educatorul Montessori nu predă în mod tradițional. Copiii învață singuri, folosind materialele specifice, timp în care rolul educatorului este să direcționeze, să stimuleze și să ghideze activitatea acestora. În primă

instanță copiilor li se face o prezentare a materialelor. Încet și cu mișcări precise, educatorul utilizează materialul potrivit cu destinația sa, timp în care un grup de copii sau un singur copil îl urmărește. În timpul acestei demonstrații, cuvintele și mișcările excesive sunt evitate, iar acțiunile sunt segmentate astfel încât să se asigure o mai bună înțelegere a conceptului prezentat.

Decizia de a preda o anumită lecție rezultă de cele mai multe ori din observarea atentă a copiilor, precum și din evaluarea muncii lor anterioare. Unele lecții pot fi explicate din nou, dacă se constată că un copil are nevoie de mai multa informație sau de informație nouă.

Educatorul nu se amestecă niciodată atunci când un copil e concentrat, și nu intervine decât dacă a constatat că acesta are nevoie de ajutor, nu știa ce să facă, sau îl deranjează pe ceilalți colegi. Ajutorul pe care un educator Montessori îl oferă copilului este întotdeauna extrem de limitat -atât cât să se asigure că acesta a ieșit din impas. Copilul nu este corectat atunci când greșește. Se consideră că încă nu a ajuns să stăpânească suficient conceptul respectiv, iar materialul respectiv va fi strâns și reluat cu alt prilej, după o lecție individuală, ori după o anumită perioadă de timp.

Educatorul Montessori nu pedepsește copiii niciodată, dar nici nu le oferă recompense. Se consideră că singura recompensă de care are nevoie un copil este cea provenită din mulțumirea de sine, din faptul că a realizat un lucru bun și corect, bazându-se pe propriile lui puteri.

În cazul în care un copil îi deranjează pe colegii lui sau se comportă într-un mod care afectează armonia și ordinea din clasă, acesta va fi luat de către educator și dus într-un loc retras de ceilalți copii. I se va asigura jocul favorit, dar va fi lipsit de libertatea de a se deplasa prin clasă după voința proprie.

Educatorul va veni din când în când și îi va adresa cuvinte blânde de simpatie sau ajutor, în cazul în care are nevoie. Se consideră că lipsa libertății de mișcare și tratarea copilului ca pe un bolnav este suficientă pentru a-l face să înțeleagă că a greșit.

„În loc să încercăm să-l cucerim din interior și să-l direcționăm ca pe un suflet uman, întotdeauna ne-am dorit să dominăm copilul prin forță, prin impunerea unor legi extreme. În acest mod copiii au trăit pe lângă noi fără să ajungem să fim capabili de a-i înțelege vreodată. Dar dacă dăm la o parte toată artificialitatea cu care i-am învăluit și toată violența cu care, prosteste, am încercat să-i disciplinăm, ei ni se vor arăta nouă în toată frumusețea firii lor copilărești, cu o gentilețe și o drăgălășenie absolută.” (Maria Montessori-Metoda Montessori-1969)

Montessori a observat cum copiii prosperă atunci când li se oferă libertatea într-un mediu propice nevoilor lor. După o perioadă de intensă concentrare și lucru cu materiale care le stârnesc interesul, copiii dau dovadă de vitalitate și mulțumire de sine. Concentrându-se la o activitate liber aleasă, neîntreruptă, copiii ajung la autodisciplină și pace interioară. Dr. Montessori a denumit acest proces “normalizare” și este citat ca fiind “ cel mai important rezultat al muncii noastre”. (Maria Montessori-Mintea absorbanta-1949)

Mediul și materialele dintr-o clasă Montessori

Dr. Montessori a considerat că, pentru ca un copil să facă cele mai productive alegeri și să își exercite controlul asupra alegerilor facute, mediul înconjurător trebuie să fie special proiectat astfel încât să stimuleze o activitate constructivă din partea acestuia.

Fiind una din modalitățile prin care acest mediu este pregătit, ordinea, facilitează dorința copilului de a alege și concentrarea. Bunul simț sugerează că este mult mai ușor să alegi obiectul dorit atunci când alternativele sunt aranjate într-o manieră ordonată.

Materialele Montessori îi ajută pe copii să facă alegerea dorită prin faptul că acestea sunt expuse pe rafturi, la o înălțime potrivită vârstei, pe mese sau pe covorașe. Astfel este foarte ușor pentru copil să ia materialele de pe rafturi, să le utilizeze pentru un timp și apoi să le pună la loc. Din contra în clasele tradiționale, materialele sunt de cele mai multe ori închise în dulapuri și profesorul este cel care controlează când și cum urmează să fie utilizate.

O alta modalitate prin care mediul ajută copilul și îi facilitează alegerea și controlul asupra activității dorite este dimensiunea mobilei. Aceasta constă în scaune și mese din lemn create special

pentru copii care se pot deplasa acolo unde dorește fiecare copil să își desfășoare activitatea , locurile nefiind prestabilite. (acum un lucru obișnuit, se pare că este rodul inovatiei Mariei Montessori-Elkind, 1976)

Clasa Montessori este așezată pe „zone”, de obicei delimitate de dulăpioare cu rafturi joase. Fiecare „zona” conține materiale specifice subiectelor respective (arta, muzică, matematica, științe,etc.)

Materialele de pe rafturi au ca scop atragerea interesului copilului și acumularea cunostințelor prin utilizarea repetată. Fiecare material are un scop bine determinat și este de dorit să fie utilizat exclusiv în acest scop. Utilizarea corectă a acestor materiale este de natură să promoveze o mai bună înțelegere a unui anumit concept . Când se constată că materialele nu sunt folosite conform cu destinația lor, educatorii repetă lecțiile .

Deasemenea curriculumul Montessori este extrem de bine structurat. Materialele care formează curriculumul sunt prezentate în secvență ierarhică existând și o legătură complexă cu materialele din diferite alte zone ale aceluiași curriculum.

Materialele sunt autocorectoare. Când o piesă nu se potrivește sau este lăsată pe dinafară , copilul poate percepe cu ușurință eroarea. Astfel nu este necesară corectarea copilului de către adult. Copilul este capabil să rezolve problemele independent, dezvoltându-și astfel încrederea în sine, gândirea analitică și satisfacția ce decurge din ducerea la bun sfârșit a unei activități prin propriile-i puteri.

Principii Montessori

Principiul de bază este autoeducarea și aplicarea celor învățate direct, nemediat.

Crearea e grupe educaționale ce acoperă 3 ani, spre exemplu 3-5 ani, sau 6-9 ani, sau 7-10 ani.

Încurajarea copiilor de a lua mereu decizii proprii pe care să le respecte.

Curățenia și aranjarea locului unde își desfășoară activitatea copii sunt făcute de ei înșiși, în funcție de modul specific cum se autoconduc.

Matematica a fost privită de Maria Montessori ca fiind un proces mental, natural care începe la un nivel concret și progresează către un nivel abstract, fiecare copil având spirit matematic înăscut.Scopul utilizării materialelor de matematică este de a pune bazele pentru dezvoltarea cognitivă și pentru a pregăti tranziția treptată spre gândirea abstractă.

Școala Montessori este o pedagogie a libertății, copiii învață prin ei înșiși, într-un mediu special pregătit. Așa cum copiii învață să vorbească fără să le țină cineva lecții tot așa pot învăța cultura, obiceiuri comportamente, scrisul, cititul, matematica, științele într-un mod individual și un ritm propriu. Mediul Montessori conține materiale pentru dezvoltare special proiectate care învață copiii să se angajeze în activități de învățare pe care le aleg în mod liber.Sub îndrumarea unui cadru didactic special instruit, copiii dintr-o clasă Montessori învață prin descoperire cu ajutorul materialelor, dezvoltându-și capacitatea de concentrare, motivația, autodisciplina, controlul de sine, precum și o dragoste pentru învățare care durează toată viața. Nu există bănci, catedră, catalog, copiii sunt liberi să-și aleagă singuri activitățile și locul de desfășurare a acestora. Copiii care urmează metoda Montessori dobândesc abilități de comunicare deosebite deoarece clasele nu sunt constituite după criterii riguroase de vârstă.

Prin aplicarea acestei metode este respectată personalitatea și independența elevului, sunt respectate toate legile naturale de dezvoltare a spiritului uman. Pedagogia Montessori asigură dezvoltarea completă a copilului intelectuală, fizică, emoțională, spirituală și crează cetățeni responsabili și implicați.

Prin modul ei actual de organizare școala românească nu respectă libertatea, independența, personalitatea și drepturile copilului, ceea ce duce la abandon școlar, stres și violență. Deși , metoda Montessori, ca întreg, nu poate fi integrată, deocamdată, în structura școlilor de stat, ar putea fi folosite materiale Montessori, materiale care transmit informațiile într-un mod plăcut, copiii având

posibilitatea de a lucra individual, în ritm propriu, nu sub presiunea profesorului. O asemenea metodă pedagogică ar avea succes cu copiii de etnie rromă, o categorie de elevi pe care pedagogia tradițională nu prea reușește să îi motiveze și să îi țină în școli.

Pedagogia Montessori are succes în întreaga lume, există 8000 de astfel de școli pe toate continentele. În România există grupe de grădiniță Montessori în Drobeta Turnu Severin, Timișoara, București, Miercurea Ciuc și o școală elementară în Cluj.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Ionescu M., Radu I. (2004), *Didactica modernă*, Editura Dacia, Cluj Napoca
- [2] Radu, I.T., Ezechil L. (2006), *Didactica teoria instruirii*, Editura Paralela 45 ,
- [3] <http://www.gradinitamontessori.ro/ofertaeducationala/curriculum/>

CUPRINS

SECȚIUNEA BIOLOGIE

EFFECTUL ALELOPATIC AL SOLUȚIEI DE HREAN ASUPRA GERMINAȚIEI SEMINȚELOR DE RIDICHE ROȘIE , Mirela Maria PRECUP, Ileana SIMONA LONGA.....	3
--	---

SECȚIUNEA CHIMIE

DETERMINAREA CONCENTRAȚIEI UNEI SOLUȚII NECUNOSCUTE DE SULFAT DE CUPRU , Alexandru Nicolae BADEA, Mark TOZSER, Cristina SZABO, Anda Ioana Grațîela PETREHELE, Claudia Mona MORGovan.....	10
SEPARAREA UNOR CAROTENOIDE DIN FRUNZELE DE MUR (<i>Rubus fruticosus</i>) , Erika PAPP, Rares Mihnea HODISAN, Sorin HODISAN.....	15
DETERMINAREA CONSTANTEI DE STABILITATE A COMPLEXULUI IONILOR DE ARGINT CU MOLECULE DE AMONIAC , Mihaela Diana SCARLAT, Amalia Diana ȘANDOR, Oana CHIȘE, Gabriela Elena BADEA, Alexandrina FODOR.....	21
STUDII PRIVIND ANALIZA FIERULUI DIN PROBE DE SOL , Maria CĂRĂBAN, Alexandru BADEA, Mioara SEBEȘAN, Oana STĂNĂȘEL.....	26
DETERMINAREA SPECTOFOTOMETRICĂ A Fe DIN SUCUL DE FRUCTE , Claudia-Alexandra POLENSZKI, Alexandrina FODOR, Anda-Ioana Grațîela PETREHELE, Claudia Mona MORGovan.....	31
ECO-INHIBITORI DE COROZIUNE DIN EXTRACTE NATURALE , Camelia Daniela IONAȘ (ȚICĂRAT), Caius Marian STĂNĂȘEL, Petru Gabriel BADEA, Alexandru BADEA, Andrei Daniel ȚICĂRAT, Sanda BOTA.....	35
STUDIUL FIZICO-CHIMIC A UNOR ULEIURI PROTECTOARE PENTRU PIELE , Mădălina SIMU, Horea-Radu SEBEȘAN, Mioara SEBEȘAN	38

SECȚIUNEA FIZICĂ

JUSTIFICAREA REPLANIFICĂRII TRATAMENTULUI ÎN MANAGEMENTUL TUMORILOR DIN SFERA ORL , Noemia-Daniela BUCUR, Loredana MARCU.....	44
APLICAȚII ALE ECOGRAFIEI , Patrick BULZAN, Adina-Monica TODERAȘ.....	52
DINAMICA CÂMPURILOR ELECTROMAGNETICE ÎNTR-UN UNIVERS CURBAT DE GRAVITAȚIE , Bogdan Mihai CRISTE, Eugen-Victor MACOCIAN.....	56
SPECTRUL ÎN IR AL CO₂ ȘI APLICAȚII ÎN DETECTAREA COMPOZIȚIEI CORPURILOR CERESTI , Monica FLORA, Mădălina COJOCARU.....	62
ROLUL CBCT ÎN CREȘTEREA PRECIZIEI TRATAMENTULUI LA BORDUL ACCELERATORULUI LINIAR , Mihaela Roxana GOILEAN, Loredana MARCU.	66
APLICAȚII ALE TRANSFERULUI DE CĂLDURĂ PRIN RADIAȚIE , Mircea-Alexandru HARTMANN, Cristian-Dorin HOREA.....	71
UTILIZAREA IMAGISTICII PRIN REZONANȚĂ MAGNETICĂ ÎN DETECTAREA PATOLOGILOR NEURODEGENERATIVE , Mircea-Alexandru HARTMANN, Adina-Monica TODERAȘ, Alexandru TODERAȘ, Iuliu-Cristian DRAGOMIR.....	75
POTENȚIALUL DE INHIBARE HERG A SILIMARINEI ȘI CURCUMEI , Greta-Tamara KISS, Darius-Maximilian MANGRA, Adina-Monica TODERAȘ	82
STUDIUL TRANSFERULUI DE CĂLDURĂ PRIN CONDUȚIE ÎN SOLIDE , Darius-Maximilian MANGRA, Cristian-Dorin HOREA.....	85
PROTOCOL STANDARD DE ANDOCARE UTILIZÂND AUTODOCK , Darius-Maximilian MANGRA, Adina-Monica TODERAȘ, Alexandru TODERAȘ.....	89
TRANSFORMAREA POLITROPĂ ȘI MODUL DE ABORDARE APLICATIVĂ ÎN CONTEXTUL EXAMENELOR DE DEFINITIVARE ȘI DE TITULARIZARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR , Camelia MEDREA, Carmen-Daniela CĂPITANU.....	95
CONSIDERENTE PRIVIND EVOLUȚIA ASTIGMATISMULUI LA PERSOANE TINERE , Denisa-Larisa-Carina POP, Carmen-Daniela CĂPITANU.....	101
APLICAȚIE DE VIZUALIZARE A IMAGINILOR DICOM , Florina Ioana SELEGEAN, Pașcu Cătălin MOCA.....	105
TOMOGRAFIA PRIN EMISIE DE POZITRONI (PET) , Richard-Natanael URS, Adina-Monica TODERAȘ, Alexandru TODERAȘ.....	111

SECȚIUNEA MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

IMPORTANȚA JOCULUI DIDACTICO-MATEMATIC, ÎN DEZVOLTAREA CAPACITĂȚILOR INTELECTUALE LA ȘCOLARUL MIC , Mirela Ramona BALA, Emilia BALA.....	118
IMPORTANȚA STUDIERII MATEMATICII ÎN DEZVOLTAREA GÂNDIRII ELEVILOR , Radu Vasile BOLOȘ, Ioana Florina BOLOȘ.....	124
APLICAȚII ALE TEOREMEI HAMILTON-CAYLEY , Gabriela BURTIC.....	127

APLICAȚII COLABORATIVE , Melinda CORITEAC.....	132
GENERALIZĂRI ALE UNOR FORMULE TRIGONOMETRICE , Ana Maria COSMESCU.....	136
STRATEGII DE PROMOVARE A COMPETENȚELOR MATEMATICE PENTRU ELEVII DE CLASA A V-A , Marinel Costel COSTEA.....	138
PROIECTAREA UNITĂȚII DE ÎNVĂȚARE „INELE DE POLINOAME” , Teodora CRISTEA, Alina ALB LUPAȘ	143
APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE ÎN TEORIA ȘIRURILOR , Vicu Matei DRAGOȘ.....	149
TETRAEDRE ORTOCENTRICE , Luminița DUMITRESCU.....	152
PRODUS A N-NUMERE COMPLEXE FOLOSIND NOȚIUNEA DE DETERMINANT , Denisa Anamaria FARC, Georgia Irina OROS.....	156
TEOREMA DE MEDIE , Ioana FIRTEAN.....	161
ELEMENTE DE TEORIA JOCURILOR , Ana-Maria GAVRILĂ.....	163
CONCURENȚĂ ȘI COLINIARITATE , Livia-Marina HARABAGIU.....	165
ASPECTE ALE PROCESULUI COMUNICĂRII ÎN ACTUL MENTORATULUI INFORMAL AL PROFESORULUI DE MATEMATICĂ DIN JUDEȚUL BIHOR , Monica Florina HENES.....	172
PREDAREA MATEMATICII PRIN INTERMEDIUL APLICAȚIILOR RED , Viorica-Cornelia HOFFMANN-BRONȚ.....	178
APLICAREA INDUCȚIEI MATEMATICE ÎN STUDIUL UNOR INEGALITĂȚI , Daiana IAGĂR, Alina ALB LUPAȘ.....	183
NOȚIUNI DE TEORIA PUNCTULUI CRITIC , Dana KELE, Dana CORBA.....	196
EXTREMELE FUNCȚIILOR DE GRADUL AL DOILEA , Gheorghe Marius MOLDOVAN.....	201
VALENȚE FORMATIVE ALE ACTIVITĂȚII DE REZOLVARE A PROBLEMELOR , Iuliana MOLDOVAN.....	205
EDUCAȚIA ȘI PROVOCĂRILE LUMII CONTEMPORANE. ROLUL EDUCAȚIEI ÎN CONTEXTUL ACTUAL , Daniela MORARU.....	209
DRUMURI DE VALOARE OPTIMĂ. APLICAȚII , Marta Ghizela NAGY.....	212
DEFECTUL DE DISTRIBUTIVITATE AL OPERAȚIILOR BINARE , Corina Nicoleta NEGRUȚIU.....	218
STUDIUL RĂDĂCINILOR MULTIPLE ALE UNUI POLINOM , Răzvan Nicolae OTIMAN.....	222
ALGORITMI CRIPTOGRAFICI SIMPLI CONSTRUIȚI ÎN MAȘINI TURING , Roland-Alexandru PALI, Marian DEGERATU.....	227
JOCUL DIDACTIC ÎN DEZVOLTAREA PSIHO-EMOȚIONALĂ A COPILULUI , Alina PARASCHIV..	233
STUDIUL UNOR PROBLEME DE ECHILIBRU MECANIC DIN PUNCT DE VEDERE GEOMETRIC , Alina PARASCHIV, Alice ANGHELESCU.....	236
O CĂUTARE PE WEB MAI RAPIDĂ, CU AJUTORUL AUTOMATULUI FINIT DETERMINIST , George-Daniel PECHERLE, Marian DEGERATU.....	243
CALCULUL CARACTERISTICILOR NUMERICE ASOCIATE NUMERELOR FUZZY ÎN CAZUL NUMERELOR FUZZY LINIARE PE PORȚIUNI , Adrian Șerban RAȚ.....	248
GRUPURI FINITE. APLICAȚII , Adrian Șerban RAȚ.....	255
ELEMENTE NILPOTENTE ȘI IDEMPOTENTE , Carmen RUSU.....	261
PREDAREA ȘI ÎNVĂȚAREA UNITĂȚILOR DE MĂSURĂ ÎN CICLUL PRIMAR , Lavinia SABĂU.....	264
METODA MONTESSORI , Marinel ZAHA.....	279
CUPRINS	283